Texto del estudiante

Matemática

Claudia Victoria Torres Jeldes • Mónica Viviana Caroca Toro

8° básico

REUTILIZABLE
TEXTO ESCOLAR

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

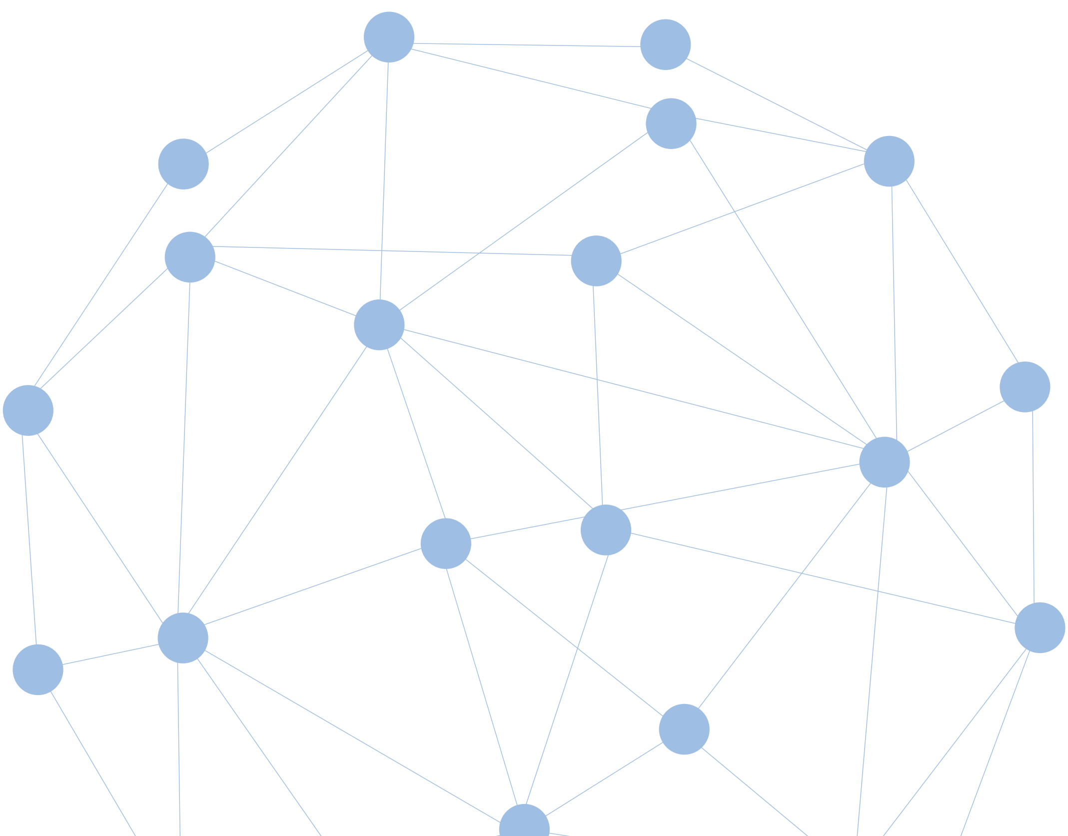
SANTILLANA

Matemática 8° Básico

Texto del Estudiante

Claudia Victoria Torres Jeldes
Profesora de Matemática
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Mónica Viviana Caroca Toro
Profesora de Matemática y Física
Licenciada en Ciencias Exactas
Universidad de Chile



El Texto del Estudiante **Matemática 8° Básico** es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana, bajo la dirección editorial de:

RODOLFO HIDALGO CAPRILE

Subdirección editorial:	Cristian Gúmera Valenzuela
Coordinación Área Matemática:	Cristian Gúmera Valenzuela
Edición:	Dafne Milenka Vanjorek Suljgoi
Autoría:	Claudia Victoria Torres Jeldes Mónica Viviana Caroca Toro
Corrección de estilo:	Alejandro Cisternas Ulloa Michel Ortiz Ruiz
Consultoría pedagógica:	Gabriela Elisa Zúñiga Puyol Karla Andrea Föhl Guerrero Víctor Hugo Llantén Pérez
Solucionario:	Matías Andrés Ávila Indo Rafael Matías Castro Aguayo
Documentación:	Cristian Bustos Chavarría
Subdirección de Diseño:	María Verónica Román Soto
Diseño y diagramación:	Álvaro Pérez Montenegro
Ilustraciones:	Antonio Ahumada Mora
Fotografías:	Wikimedia Commons Shutterstock Gettyimages
Producción:	Rosana Padilla Cencever

En este libro se utilizan de manera inclusiva términos como "los niños", "los padres", "los hijos", "los apoderados", "profesores" y otros que refieren a hombres y mujeres.

PRINTED IN CHILE. Impreso en Chile por A Impresores.
ISBN: 978-956-15-3483-4 / Inscripción Nº: 310.624
Se terminó de imprimir esta 1ª edición de 230.456 ejemplares, en el mes de diciembre del año 2019.

Matemática 8° Básico

Texto del Estudiante

Te damos la bienvenida a este nuevo año escolar. El Texto ***Matemática 8°*** *te invita a comprender que la Matemática es parte del mundo que te rodea.*

A través de sus páginas te enfrentarás a diversas situaciones en las que podrás desarrollar habilidades para explorar, aprender y construir conceptos matemáticos a partir de los diferentes ejes.

En Números profundizarás tus conocimientos sobre operaciones con números enteros; descubrirás y emplearás estrategias para multiplicar y dividir números racionales; calcularás potencias y raíces cuadradas y aplicarás variaciones porcentuales en diversas situaciones de la vida diaria.

En Álgebra y funciones calcularás operaciones de expresiones algebraicas, plantearás y resolverás ecuaciones e inecuaciones y conocerás las funciones y sus representaciones.

En Geometría calcularás el área y el volumen de prismas y cilindros, aplicarás el teorema de Pitágoras en distintas situaciones y realizarás transformaciones isométricas en el plano cartesiano y en el espacio.

En Probabilidad y estadística calcularás e interpretarás medidas de posición y construirás diagramas de cajón para diversos grupos de datos. Además, aplicarás el principio multiplicativo y determinarás probabilidades de ocurrencia de eventos.

Podrás trabajar junto con tus compañeras y compañeros, resolver problemas, conectar tus aprendizajes con temas de actualidad y utilizar herramientas tecnológicas. Todo esto a través de actividades en las que podrás razonar, reflexionar, analizar y compartir tus conocimientos.

Organización del Texto

Te invitamos a conocer tu texto de **Matemática 8° Básico** que está organizado en cuatro unidades y en cada una podrás encontrar:

Inicio de Unidad

Nombre y número de unidad

Se relaciona con la temática o **hilo conductor** que se desarrollará en la unidad.

La **pregunta esencial** sirve como anclaje del título para la unidad, y se activa periódicamente con preguntas orientadoras que invitan a la reflexión y a construir una respuesta propia por parte del estudiante a la pregunta esencial.

Lecciones

Se especifica la organización de los objetivos de la unidad.

Propósito de la unidad

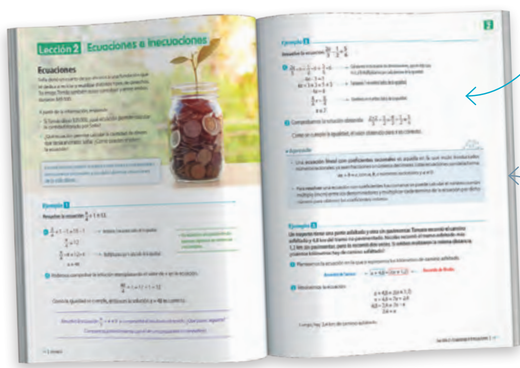
Se declara el **propósito** que se desarrollará a lo largo de la unidad.

Evaluación diagnóstica

Instancia que permite reconocer los conocimientos previos correspondientes a la unidad.

Lecciones

Al **inicio de cada lección** se propone una sección cuya finalidad es reconocer las ideas previas y las motivaciones personales de los estudiantes, y acercarlos a los nuevos aprendizajes a través de una situación problematizadora contextualizada.



Ejemplos

Ejemplos desarrollados paso a paso con las correspondientes propuestas para su resolución.

Aprende

Formalización de los conocimientos desarrollados.

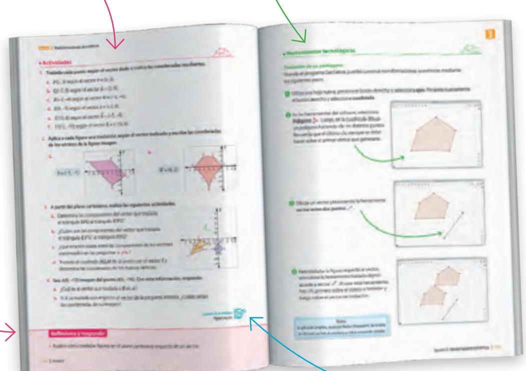
Actividades

Sección donde se proponen actividades en contextos diversos para que puedas aplicar y transferir lo estudiado a nuevas situaciones.

Son instancias para desarrollar tus habilidades, tu creatividad y lo propio de esta disciplina.

Herramientas tecnólogicas

A lo largo de la unidad aprenderás a utilizar ***softwares* educativos** para desarrollar diversas actividades.



Reflexiona y responde

Instancia de metacognición vinculada con los conocimientos, habilidades y actitudes desarrollados.

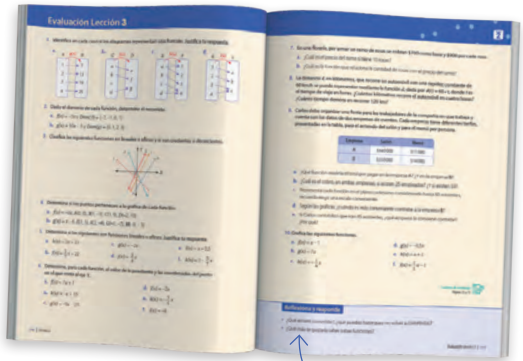
Cuaderno de Actividades

Vínculo directo con el Cuaderno de Actividades.

Evaluaciones

■ Evaluación de Lección

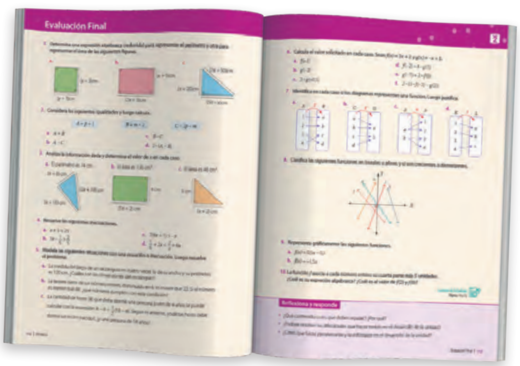
Evaluación que te permitirá reconocer los aprendizajes adquiridos en cada lección.



Instancia **metacognitiva** que invita al estudiante a reflexionar sobre sus logros y dificultades.

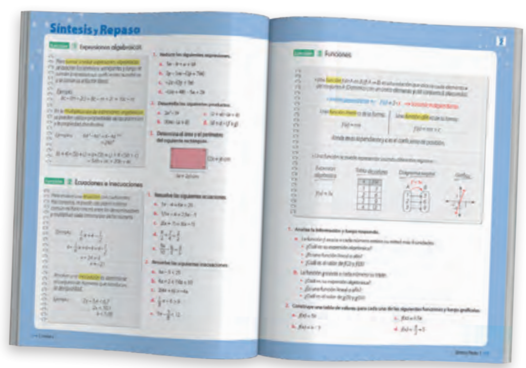
■ Evaluación de unidad

Evaluación que te permitirá reconocer los aprendizajes adquiridos en las experiencias de aprendizaje desarrolladas en la unidad.



■ Síntesis y Repaso

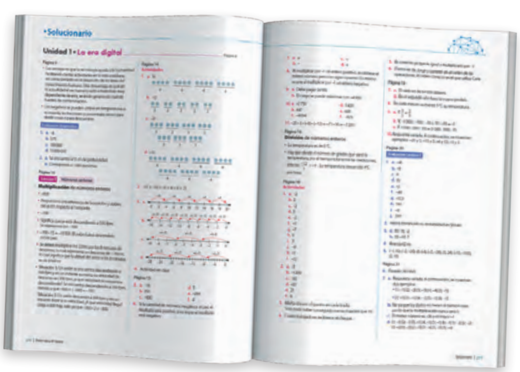
Actividades que te permitirán consolidar los aprendizajes desarrollados en cada lección de la unidad.



Páginas finales

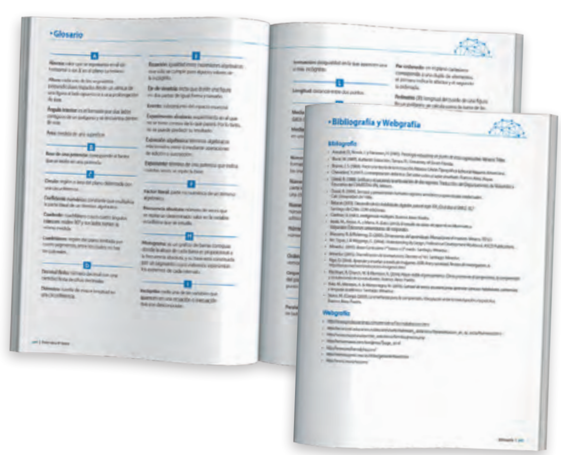
■ Solucionario

Encontrarás las respuestas a cada actividad del texto.



■ Glosario | Bibliografía | Webgrafía

Podrás encontrar la definición de algunos conceptos básicos trabajados a lo largo del texto.



Índice

1 Unidad La era digital

2 Unidad Medioambiente

3 Unidad La geometría del arte

4 Unidad El deporte

En Chile (enero 2018) hay un total de 28 115 115 teléfonos móviles, más de 10 millones por sobre la cantidad de habitantes del país. Por otra parte, un estudio muestra que los chilenos pasan 5 horas diarias conectados al teléfono. Como si fuera poco, Chile es líder en el uso de redes sociales.

1 Unidad La era digital

¿Cómo puedes relacionar los números con la tecnología?

En esta unidad estudiarás los números enteros, los números racionales, las potencias y raíces, y las variaciones porcentuales a través de sus representaciones y del uso de las operaciones, las que te serán útiles para la resolución de situaciones problema.

Es imposible imaginar la tecnología sin los **números**, porque son la base de todos los algoritmos que permiten hacer funcionar, por ejemplo, las aplicaciones que usamos en nuestro teléfono móvil.

- ¿Cuáles crees que son la ventajas y desventajas del uso actual de la tecnología?
- ¿En qué situaciones cotidianas se utilizan los números negativos? ¿Y las fracciones o porcentajes?

Evaluación diagnóstica

1. Resuelve las siguientes operaciones.
   - a. (–4) + (–6) – (–2)
   - b. 3 • 1,25
2. Calcula el valor de cada potencia.
   - a. 10^5
   - b. 10^7
3. Resuelve los siguientes problemas.
   - a. Un submarino se encuentra inicialmente a 32 m de profundidad y luego desciende 23 m más. ¿A qué profundidad se halla el submarino?
   - b. En una encuesta quedó reflejado que el 70 % de las personas afirma escuchar música en su celular utilizando audífonos. Si respondieron la encuesta 1 500 personas, ¿a qué cantidad corresponde dicho porcentaje?

Lección 1 Números enteros

Multiplicación de números enteros

- El altímetro del avión indica que está a 5600 ft (pies) de altura. Si luego desciende 800 ft, ¿con que número entero puedes representar dicho descenso?
- Averigua qué información entrega el indicador de actitud del panel de instrumentos de un avión.

En esta lección comprenderás procedimientos asociados a la multiplicación y la división de números enteros.

Altímetro

Instrumento de medición que indica la diferencia de altitud entre el punto donde se encuentra localizado y un punto de referencia; habitualmente se utiliza para conocer la altura a la que se encuentra un punto sobre el nivel del mar.

Variómetro o Indicador de velocidad vertical (VSI)

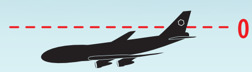
Vuelo nivelado

Indica si el avión está ascendiendo, descendiendo o va nivelado, y la velocidad vertical respectiva. Si la manecilla indica cero, el vuelo está nivelado.

Ascenso a 700 fpm

Si la manecilla está por **encima** del cero, entonces está ascendiendo.

Descenso a 700 fpm



Si la manecilla está por **debajo** del cero, es que el avión desciende.

Responde

- ¿Con qué número entero puedes representar el descenso que se muestra en la imagen a 700 fpm (pies por minuto)?
- Si la manecilla del variómetro de un avión indica el 5 por debajo de cero, ¿qué información está entregando? ¿Con qué número entero puedes representar dicha situación?
- Si el piloto de un avión decide descender a 700 fpm, ¿cuántos pies habrá descendido luego de 15 min? Representa dicho valor con un número entero.
- Un avión que se encuentra a 9 800 m de altitud desciende 220 m cada 1 min.
  - ¿Qué operación puedes aplicar para calcular los metros que desciende el avión en 8 min?
  - ¿Con qué número entero representas dicho descenso?
  - ¿Cuál es la altitud del avión luego de los 8 min?
- Crea una situación en la que se relacionen números negativos con la velocidad vertical de un avión.

- 1 ft (pie) equivale, aproximadamente, a 0,3 m.

Ejemplo 1

Resuelve las multiplicaciones $3 \cdot (-12)$ y $(-5) \cdot 6$.

- Para calcular $3 \cdot (-12)$, podemos considerar la multiplicación como una **adición de sumandos iguales**, por lo que $3 \cdot (-12)$ puede interpretarse como 3 veces (-12), es decir:

$$3 \cdot (-12) = (-12) + (-12) + (-12)$$

Luego, $3 \cdot (-12) = -36$.

¿Puedes aplicar el mismo procedimiento para calcular $(-12) \cdot 3$?

- Para resolver la multiplicación $(-5) \cdot 6$, podemos utilizar la **propiedad conmutativa** de la multiplicación y escribirla como una adición de sumandos iguales.

$$(-5) \cdot 6 = 6 \cdot (-5) \quad ▶ \quad 6 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -30$$

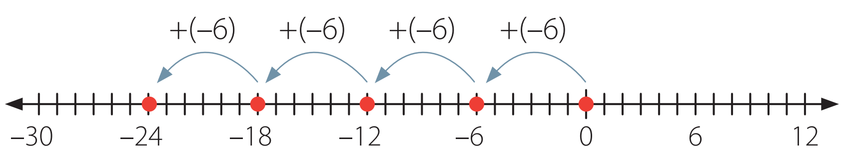
Considerando lo anterior, calcula los productos de las siguientes multiplicaciones:

$2 \cdot (-20)$ $\quad (-7) \cdot 4$ $\quad (-15) \cdot 1$ $\quad 5 \cdot (-8)$

Ejemplo 2

Representa en la recta numérica la multiplicación $4 \cdot (-6)$.

1. Como $4 \cdot (-6) = (-6) + (-6) + (-6) + (-6)$, ubicamos el (-6) en la recta numérica y representamos la adición.



2. Luego, $4 \cdot (-6) = -24$.

Aprende

- En la **recta numérica**, los números enteros positivos (+) se ubican a la derecha del cero (0), y los enteros negativos (–), a la izquierda.
- Al sumar un número **positivo** a un número entero, el desplazamiento en la recta numérica se realiza hacia la **derecha**.
- Al sumar un número **negativo** a un número entero, el desplazamiento en la recta numérica se realiza hacia la **izquierda**.

Ejemplo 3

Analiza la siguiente secuencia de multiplicaciones y responde.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (-2) &= -4\\
1 \cdot (-2) &= -2\\
0 \cdot (-2) &= 0\\
(-1) \cdot (-2) &= \boxed{?}\\
(-2) \cdot (-2) &= \boxed{?}
\end{aligned}
$$

- En la multiplicación se tiene que:

$$\underbrace{\boxed{a \cdot b}}_{\text{Factores}} = \underbrace{c}_{\text{Producto}}$$

¿Cuáles son los números que podrían continuar los productos de cada multiplicación?

1. Observa que los números correspondientes al primer factor de cada multiplicación disminuyen de 1 en 1 y que los resultados forman una secuencia que aumenta de 2 en 2.
2. La secuencia podría continuar así:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (-2) &= -4\\
1 \cdot (-2) &= -2\\
0 \cdot (-2) &= 0\\
(-1) \cdot (-2) &= 2\\
(-2) \cdot (-2) &= 4
\end{aligned}
$$

- *Considerando lo anterior, ¿cuáles son los productos de las siguientes multiplicaciones?*

  $(-3) \cdot (-2)$ $(-4) \cdot (-2)$ $(-5) \cdot (-2)$ $(-6) \cdot (-2)$

- *Escribe una secuencia de multiplicaciones en la que el segundo factor sea (–3). ¿Podrías explicar un procedimiento para multiplicar números enteros de distinto signo? ¿Y de igual signo? Comenta con tus compañeros.*

Ejemplo 4

Calcula el valor de la expresión $(-45) \cdot 0 + 20 \cdot (-11) - 9$.

1. Respetamos el orden de las operaciones y resolvemos las multiplicaciones de izquierda a derecha.

$$0 + (-220) - 9$$

2. Calculamos usando las reglas de la adición de números enteros.

$$(-220) + (-9) = -229$$

Aprende

- Para **multiplicar números enteros**, puedes utilizar la **regla de los signos**:

$$(+) \cdot (+) = (+) \qquad (-) \cdot (-) = (+) \qquad (+) \cdot (-) = (-) \qquad (-) \cdot (+) = (-)$$

- Todo número a **multiplicado por cero** resulta cero, es decir, $a \cdot 0 = 0$.

Actividades

1. En parejas, realicen una actividad utilizando fichas de color verde y rojo. Guíense por el siguiente ejemplo:

> Consideren que cada ficha de color verde representa 1, y cada ficha roja representa –1.
>
> $3 \cdot 2$ ▶ $\underbrace{1 \quad 1}_{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$ ▶ 3 grupos de 2 ▶ $3 \cdot 2 = 6$
>
> $2 \cdot (-5)$ ▶ $\underbrace{-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1}_{-5} \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1$ ▶ 2 grupos de (-5) ▶ $2 \cdot (-5) = -10$

Representen con las fichas los productos de las siguientes multiplicaciones.

a. $4 \cdot 4$ **b.** $6 \cdot (-2)$ **c.** $(-7) \cdot 3$ **d.** $(-8) \cdot 4$

2. Ordena de menor a mayor los productos de las siguientes multiplicaciones:

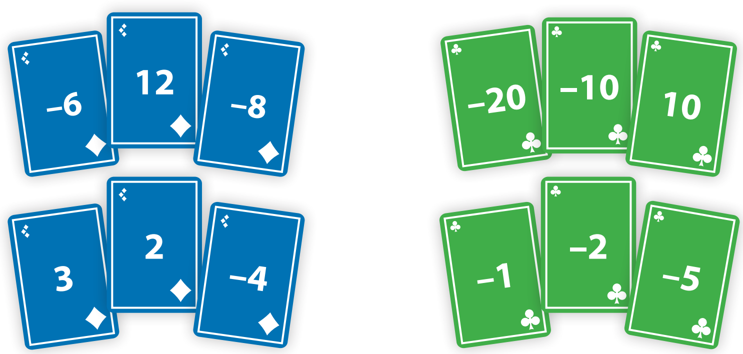
$(-2) \cdot (-2)$	$1 \cdot (-11)$	$(-7) \cdot (-3)$	$(-10) \cdot 1$	$3 \cdot 2$	$(-1) \cdot 1$

3. Representa en la recta numérica las siguientes multiplicaciones:

a. $5 \cdot 4$ **b.** $8 \cdot (-2)$ **c.** $(-1) \cdot 6$ **d.** $3 \cdot (-3)$ **e.** $(-7) \cdot 4$

4. ¡Juguemos! Desarrolla la siguiente actividad en equipos de 4 personas. Deberán utilizar papeles de color azul y verde.

- Usen los papeles azules y verdes para elaborar las siguientes tarjetas:



- Cada integrante, por turno, realiza lo siguiente:
  - Saca al azar una tarjeta azul, y luego una verde.
  - Multiplica mentalmente los números obtenidos en las tarjetas.
  - Si responde correctamente, obtiene 1 punto; si no, se resta 1 punto.
- Jueguen hasta que alguno de los integrantes complete 10 puntos.
- Comenten los aspectos positivos y las dificultades que tuvieron en el trabajo en grupo.

5. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a. 8 • (–2)

b. (–25) • (–6)

c. 7 • (–9) • 10

d. (–1) • (–1) • 5

e. (–3) • (–2) • 12 • (–4)

f. (–2) • (–1) • (–2) • (–1)

6. ¿Qué estrategia utilizarías para determinar el signo que tendrá el producto en una multiplicación de varios números enteros?

7. Sin hacer los cálculos, identifica el signo del producto en cada caso.

a. 4 • (–2) • (–3)

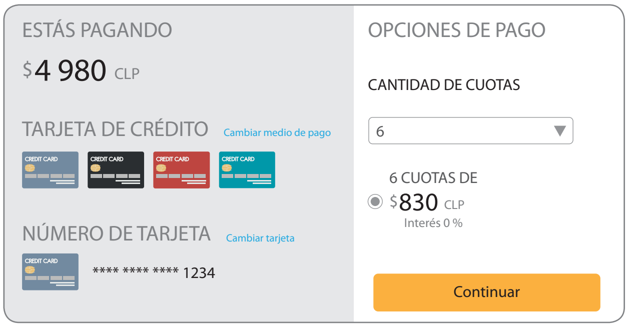
b. (–5) • (–2) • (–4)

c. (–1) • (–2) • 4 • (–7) • (–5)

d. 100 • (–5) • 10 • (–5) • (–7) • (–1)

8. ¿Qué ocurre si se multiplica por –1 un número entero positivo? ¿Y si el número es un entero negativo?

9. Nicolás hace una compra por internet con cargo a su tarjeta de crédito. El detalle de la compra se muestra a continuación:



a. ¿Cuánto pagará en total por su compra?

b. ¿Con qué número entero puedes relacionar este cargo a su tarjeta de crédito?

10. Resuelve las siguientes operaciones.

a. (–25) • 110

b. (–8) • (–54) + 15

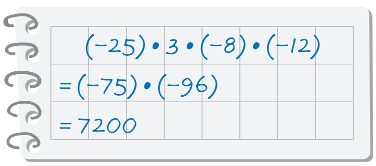
c. (–155) • 30 – 44

d. 65 – 1 256 • (–1) + 99

e. (–12) • (–5) • (–10) + 1 205

f. 15 • (–7) + (–18) • (–40) • (–1)

11. Analiza qué error se cometió al resolver la multiplicación y corrígelo.



Cuaderno de Actividades
Páginas 6 a 9.

Reflexiona y responde

- ¿Qué estrategia fue la que más utilizaste para resolver multiplicaciones?
- ¿Qué pasos sigues para resolver multiplicaciones entre números enteros? Escríbelos en tu cuaderno y luego coméntalos con tus compañeros.

División de números enteros

Las aplicaciones móviles ofrecen al usuario contenidos de diversos tipos, por ejemplo, entretenimiento, profesionales, educativos, de acceso a servicios, entre otros. Existen equipos que se utilizan para controlar la temperatura y la humedad, los cuales se pueden monitorear a distancia a través del GPS, lo que permite saber en tiempo real, en cualquier momento y lugar, la temperatura vía aplicación móvil o vía sitio web.

En un camión se traslada una carga refrigerada, la cual se monitorea con un controlador de temperatura. El encargado revisa la temperatura y observa que esta ha variado entre las 2 y las 5 de la mañana.

Observa la imagen y responde.

- ¿Cuál era la temperatura de la carga a las 2 de la mañana?
- Si la temperatura de la carga disminuyó de manera constante, ¿qué procedimiento realizarías para calcular la cantidad de grados que bajó en 1 hora? Explica.

Ejemplo 1

Resuelve la división (–54) : (–9).

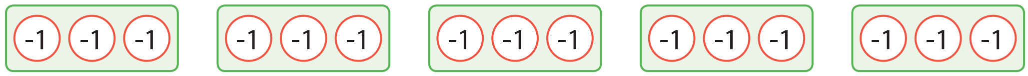
1. Para resolver una división con números enteros, podemos relacionarla con la multiplicación. Para ello, planteamos la pregunta: ¿qué número multiplicado por (–9) es igual a (–54)?
2. Como 6 • (–9) = (–54), entonces (–54) : (–9) = 6.

Ejemplo 2

Representa la división (–15) : 5.

1. Podemos utilizar fichas con valor –1 para representar el número –15.

2. Luego, formamos 5 grupos con igual cantidad de fichas.



Hay 3 fichas en cada grupo que suman –3, por lo tanto, (–15) : 5 = –3.

Aprende

- Para **dividir números enteros**, puedes utilizar la **regla de los signos**:

  (+) : (+) = (+)   (–) : (–) = (+)   (+) : (–) = (–)   (–) : (+) = (–)

  Si a y b tienen **igual signo** y $b \neq 0$, el cociente de la división $a : b$ es **positivo**.

  Si a y b tienen **distinto signo** y $b \neq 0$, el cociente de la división $a : b$ es **negativo**.

- Al **dividir el número cero** por cualquier número a ($a \neq 0$) resulta cero, es decir, **$0 : a = 0$**.

Ejemplo 3

Resuelve la división 504 : (–14) usando la regla de los signos.

1. Como los signos del dividendo y del divisor son distintos, el signo del cociente será negativo.
2. Luego, calculamos el cociente 504 : (–14) = –36.

Ejemplo 4

En la imagen se muestra la temperatura mínima de una montaña en cada mes. ¿Cuál es el promedio de las temperaturas mínimas?

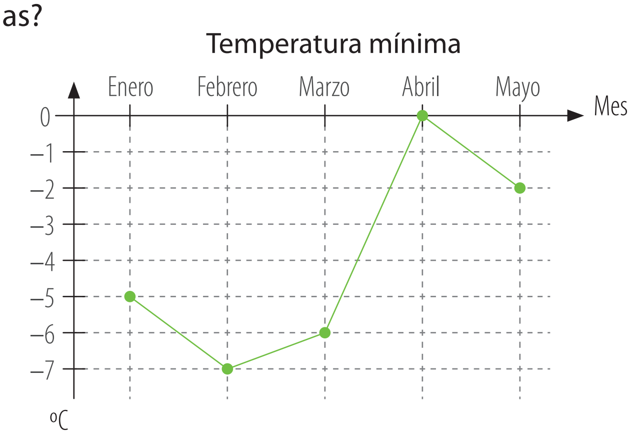
1. Sumamos las temperaturas registradas.

$$(-5) + (-7) + (-6) + 0 + (-2) = -20$$

2. Luego, dividimos la suma por la cantidad de temperaturas registradas.

$$(-20) : 5 = -4$$

Finalmente, el promedio de las temperaturas mínimas fue de –4 °C.



Actividades

1. Resuelve las siguientes divisiones.

   a. 4 : (–2) **e.** (–120) : 60 **i.** (–49) : (–7)

   b. (–12) : (–6) **f.** 4 : (–4) **j.** 81 : (–9)

   c. 72 : (–36) **g.** 56 : (–8) **k.** 100 : (–100)

   d. (–45) : (–9) **h.** 0 : (–4) **l.** (–144) : 12

- Los elementos de una división, con $b \neq 0$, son:

  Dividendo

  $a : b = c$ → Cociente

  r Divisor

  Resto

2. Determina el término desconocido en cada caso.

   a. 10 : ? = –2 **d.** (–32) : ? = 1

   b. ? : (–4) = 300 **e.** (–21) : ? = –1

   c. ? : 3 = –12 **f.** ? : 144 = 0

3. Marta participa en un juego en el cual se lanzan dos dados. Los puntos se otorgan según lo siguiente:
   - Si la suma es 10, se obtienen 2 puntos.
   - Si la suma es menor que 10, se obtienen –4 puntos.
   - Si la suma es mayor que 10, se obtienen –2 puntos.

   Marta jugó siete veces y en cada tirada consiguió la misma cantidad de puntos. Si lleva –14 puntos, ¿cuántos obtuvo cada vez? ¿Qué sumas pudo haber conseguido con los dados?

4. Una cuenta bancaria de una empresa tiene saldo cero y se decide hacer uso de su línea de crédito para pagar a los trabajadores. Cada trabajador recibió un cheque por $305 000. ¿Cuántos trabajadores recibieron dicho cheque si el nuevo saldo de la cuenta es de –1 220 000 pesos?

5. Viviana afirma que al dividir un número entero cualquiera por –1, dicho número se convierte en su inverso aditivo u opuesto. ¿Está en lo correcto? ¿Por qué?

6. Analiza junto con un compañero los procedimientos e identifiquen en cuál de ellos se cometieron errores al resolver el ejercicio. Justifiquen su respuesta.

Jorge

$$\underbrace{4 \cdot (-3)} + 8 : (-2)$$
$$\underbrace{(-12) + 8} : (-2)$$
$$\underbrace{(-4) : (-2)}$$
$$2$$

Carla

$$\underbrace{4 \cdot (-3)} + 8 : (-2)$$
$$\underbrace{(-12) + (-4)}$$
$$-16$$

7. **Lee la siguiente información y responde.**

> El estado de ganancias y pérdidas es netamente económico, y suministra toda la información de una entidad; es decir, resume todos los ingresos y los gastos producidos en un determinado tiempo.

Una empresa perdió el primer año 12 000 dólares; el segundo año, el doble del primero, y el tercer año ganó el triple de las pérdidas de los dos años anteriores juntos. Además, el cuarto año tuvo ganancias de 10 000 dólares y el quinto año, pérdidas iguales a la mitad del total de todas las pérdidas de los años anteriores.

a. ¿Cuál fue el saldo de la empresa al final del quinto año?

b. ¿En qué año tuvo la mayor pérdida?

8. **Un motor de combustión interna mantiene una temperatura de 20 °C cuando está apagado. Al encenderse, alcanza su temperatura máxima en 15 min, la cual es de 95 °C. Si el cambio de temperatura es constante, ¿cuánto varió la temperatura del motor en cada minuto?**

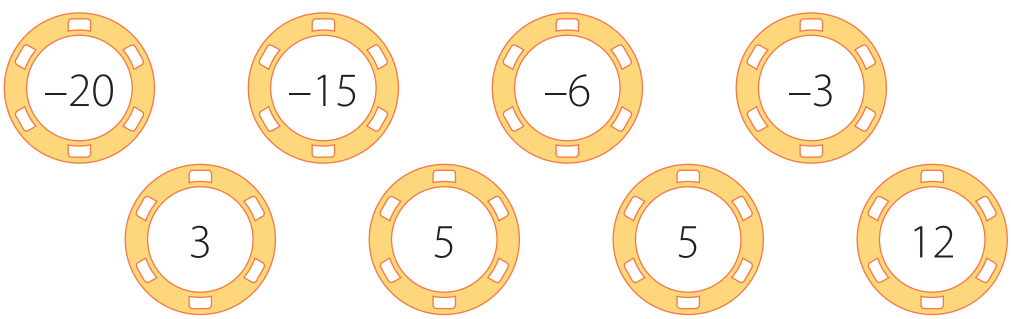
9. **Verifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Luego, crea un ejemplo o contraejemplo en cada caso.**

a. Si a y b son números enteros distintos de cero, entonces, $a : b = b : a$.

b. Si a, b y c son números enteros negativos, entonces, el resultado de $a : b : c$ es un número entero negativo.

c. Si a, b y c son números enteros distintos de cero, entonces, $(a : b) : c = a : (b : c)$.

10. **Agrupa en pares las fichas numeradas, de manera que en cada par se pueda obtener una división exacta con cociente negativo.**



Cuaderno de Actividades
Páginas 10 a 13.

Reflexiona y responde

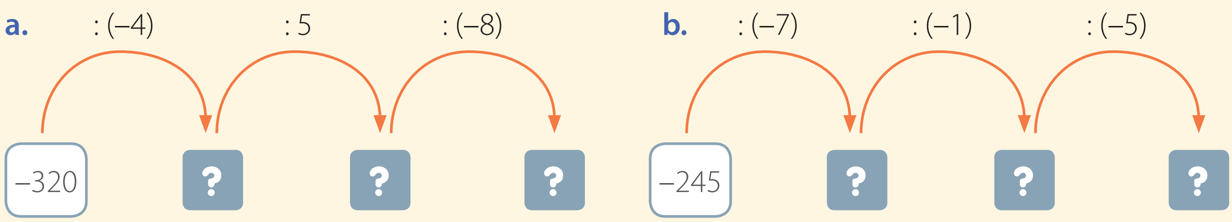
- ¿En qué otras ocasiones puedes usar la división de números enteros? Comenta con tu curso.
- ¿Crees que es más difícil resolver multiplicaciones o divisiones con números enteros? ¿Por qué?

1. Resuelve las siguientes operaciones.

   a. $15 \cdot (-3)$
   b. $(-56) : 7$
   c. $(-80) : (-10)$
   d. $(-1) \cdot 6 \cdot (-6)$
   e. $24 : (-3) : 4$
   f. $4 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2)$
   g. $(-50) : 4$
   h. $12 \cdot (-12) \cdot (-1)$
   i. $48 : (-4) : 2$
   j. $(-10) \cdot (-2) \cdot 10$

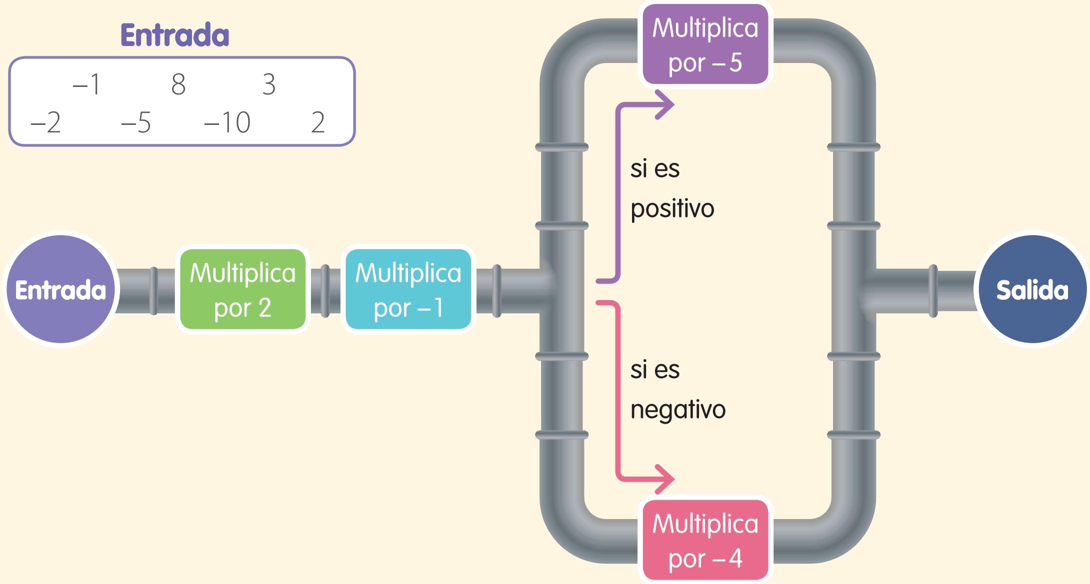
2. Si las acciones de cierta compañía disminuyen su rentabilidad en \$240 cada mes, ¿cuánto habrá disminuido al cabo de 3 años?

3. Calcula los números que faltan según las operaciones indicadas.



4. Un grupo de investigadores está realizando un reportaje acerca de la vida marina en una ciudad de Chile. Ellos se encuentran en un submarino a 186 m de profundidad en el mar. Luego de haber filmado algunos videos, comienzan a subir y llegan a la superficie en 3 h. Si cada 30 min el submarino asciende la misma cantidad de metros, ¿cuánto avanza en 1 h?

5. En la siguiente máquina se ingresan números enteros para ser sometidos a un proceso de transformación, luego del cual salen nuevamente de la máquina. Calcula el número de salida para cada número de entrada ingresado.



6. **La temperatura de un congelador desciende a razón de 3 °C cada 20 min. Si la temperatura inicial en el interior del congelador es 9 °C, ¿cuánto tiempo pasará para que alcance los –27 °C?**

7. **Analiza la siguiente información y responde.**

Pedro inventó un nuevo juego con dados. Estas son las reglas:

- Se juega con dos dados: uno blanco y uno negro. El blanco representa los enteros positivos y el negro los enteros negativos.
- Cada jugador elige un turno y lanza los dados al mismo tiempo.
- Se multiplican los números de las caras superiores.
- Gana el jugador que obtenga el menor puntaje.

a. Escribe cinco posibles resultados al lanzar los dados.

b. ¿Es posible obtener el número cero en algún turno? Justifica tu respuesta.

c. ¿Cuál es el menor número que se puede obtener al multiplicar los números? ¿Y cuál es el mayor?

d. Pedro está jugando con dos personas y en su turno obtuvo el siguiente resultado:

Pedro asegura que hoy es su día de suerte y que esta partida de seguro la ganará. Escribe los posibles resultados que deben sacar sus compañeros para que la afirmación de Pedro se cumpla.

8. **Gabriela realizó una guía de ejercicios en la cual por cada respuesta correcta se le asignan 5 puntos, por cada pregunta no contestada, –1 punto, y por cada respuesta incorrecta, –2 puntos. El resultado de Gabriela fue el siguiente:**

Respuestas correctas: **17**	Respuestas incorrectas: **5**	Preguntas sin contestar: **3**

a. ¿Cuántos puntos se le descontaron por las respuestas incorrectas y las preguntas no contestadas?

b. ¿Cuántos puntos obtuvo en total en la guía?

Cuaderno de Actividades
Páginas 14 y 15.

Reflexiona y responde

- ¿En qué situaciones de la vida cotidiana puedes aplicar estos nuevos conocimientos sobre números enteros y habilidades?
- ¿Cómo relacionas lo que ya sabías acerca de los números con lo que sabes ahora?
- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver multiplicaciones y divisiones con números enteros?

Lección 2 Números racionales

El **conjunto** de los números racionales

En una feria tecnológica de un colegio se diseñó un brazo robótico para que haga giros positivos (+) si gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj y giros negativos (–) si gira en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

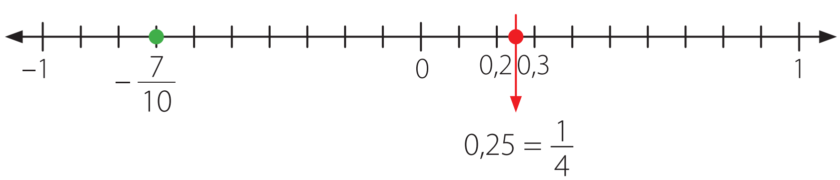
- ¿En cuáles figuras el sentido de giro es positivo?, ¿y negativo?
- ¿Podrías representar los giros del brazo en cada figura con fracciones y con números decimales? Justifica tu respuesta.

En esta lección utilizarás las operaciones de números racionales en el contexto de la resolución de problemas.

Ejemplo 1

Representa en la recta numérica los números $-\frac{7}{10}$ y 0,25.

1. Para ubicar $-\frac{7}{10}$ se divide el tramo entre –1 y 0 en 10 partes iguales y se cuentan 7 partes desde el 0 hacia la izquierda.
2. Para ubicar 0,25 se divide el tramo entre 0 y 1 en 10 partes iguales, se identifica la posición de 0,2 y de 0,3, y se divide esa parte en 2 iguales.



- Considera que 0,2 = 0,20 y 0,3 = 0,30.

Aprende

Los números que pertenecen al conjunto de los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) son aquellos que se pueden escribir como una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros y el denominador es distinto de cero.

Por ejemplo, $\frac{1}{4}$; –0,1; 9; –5; $-1\frac{1}{2}$.

Actividades

1. Identifica la magnitud de cada número racional y escribe un contexto que se relacione con dicha medida. Guíate por el ejemplo.

> –4,8 °C ▶ La magnitud es temperatura. Luego, un contexto puede ser: Temperatura mínima registrada en una ciudad.

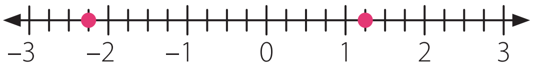
a. –18,5 m

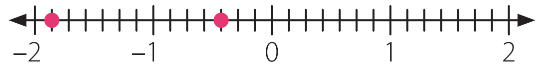
b. $\frac{3}{4}$ L

c. 1,5 h

d. $\frac{1}{2}$ kg

2. Identifica los números representados por un ● en cada recta numérica y escríbelos como fracción.

a. 

b. 

3. Represente los siguientes grupos de números en la recta numérica.

a. 0,5; 0,3; –0,5; 0,1; –1,1

b. $1\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{5}$; –1,75; 1; –1

c. $\frac{5}{2}$; 2; –1,4; 0; $\frac{2}{5}$

d. –5; –3; $\frac{5}{4}$; $2\frac{1}{4}$; –1,5

4. Determina cuál símbolo corresponde en cada caso (>, < o =).

a. $-\frac{4}{9}$ **?** $-\frac{3}{8}$

b. $\frac{9}{9}$ **?** 1

c. $-\frac{7}{30}$ **?** $-\frac{30}{7}$

d. $-5\frac{1}{4}$ **?** $-\frac{16}{3}$

5. Identifica dos números racionales que se ubiquen entre cada par de números.

a. 0,01 y 0,001

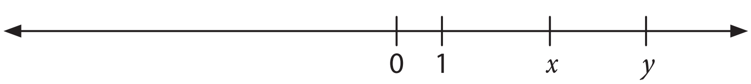
b. $-\frac{3}{7}$ y $-\frac{8}{15}$

c. –2,05 y –2,04

d. $1\frac{1}{10}$ y $\frac{12}{10}$

6. Copia la siguiente recta numérica en tu cuaderno y ubica las expresiones $\frac{x}{4}$, $-\frac{x}{2}$, $y + 1$, $-y$.

Luego, comenta con tu curso los procedimientos aplicados.



Cuaderno de Actividades
Páginas 16 y 17.

Reflexiona y responde

- Nombra tres contextos en los que se utilicen números racionales.
  - **a.** ¿En cuál de ellos se usan generalmente fracciones? ¿Y en cuál se emplean números decimales?
  - **b.** ¿Por qué puedes afirmar que corresponden a números racionales?

Fracciones y números decimales

Algunos deportistas utilizan relojes inteligentes que son dispositivos que permiten medir, entre otras cosas, la distancia recorrida, el ritmo y la frecuencia cardíaca. El cálculo se realiza empleando como criterios la frecuencia, la intensidad y la regularidad de los movimientos de la muñeca.

- ¿Has utilizado aplicaciones para planificar algún tipo de entrenamiento? ¿Qué opinas acerca del uso de la tecnología para la obtención de datos y análisis del rendimiento deportivo?
- ¿Qué datos observas en la pantalla del *smartwatch*?
- ¿Cuál de ellos está representado con números decimales?
- Imagina que comienzas a correr y avanzas 0,5 km. ¿Cómo expresarías esa distancia con una fracción?

- El Sistema Internacional de Unidades admite dos separadores decimales: el **punto** y la **coma**. Por ejemplo, en Chile, Venezuela, Colombia se utiliza la coma decimal, sin embargo, en México y Estados Unidos, se utiliza el **punto**.

- *¿Crees que puede haber números que tengan infinitos decimales?*
- *Al resolver la división 4 : 3, ¿cuál es el cociente?*

Aprende

- Números racionales decimales
  - Finitos → 1,58
  - Infinitos
    - Periódicos → $0,1212... = 0,\overline{12}$ → Período
    - Semiperiódicos → $0,5777... = 0,5\overline{7}$ → Período; Anteperíodo

Ejemplo 1

Representa como fracción y número mixto el dato correspondiente a la distancia que aparece en la pantalla del *smartwatch*.

Escribimos como numerador 13,42, pero sin la coma, y como denominador el valor de la potencia 10^2, ya que el número tiene dos cifras decimales. Luego, representamos la fracción como número mixto.

$$13{,}42 \blacktriangleright \frac{1342}{100} = \frac{671}{50} = 13\frac{21}{50}$$

- Para representar una **fracción** como **número mixto**, dividimos el numerador por el denominador. El cociente corresponde a la parte entera; el resto al numerador, y el divisor al denominador.
- También puedes considerar que 13,42 equivale a 13 enteros y 42 centésimos.

Ejemplo 2

Representa el número decimal $-1{,}\overline{27}$ como una fracción.

1.

$$-1{,}\overline{27} = -\frac{127-1}{99} = -\frac{126}{99} = -\frac{14}{11}$$

Escribimos como numerador 1,27, pero sin la coma, y le restamos la parte entera.

Como denominador escribimos noventa y nueve, ya que el número tiene dos cifras decimales periódicas.

2. Podemos comprobar lo anterior resolviendo la división entre el numerador y el denominador de la fracción.

$$-(14:11) = -1{,}272727\ldots = -1{,}\overline{27}$$

Ejemplo 3

Representa en la recta numérica el número $0{,}8\overline{3}$.

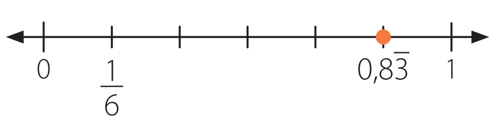
1. Para ubicar números decimales periódicos o semiperiódicos en la recta numérica, primero debemos hallar su expresión fraccionaria.

$$0{,}8\overline{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$

Escribimos como numerador 0,83, pero sin la coma, y le restamos el número que está antes del período, sin la coma.

Como denominador escribimos noventa, ya que el número tiene una cifra periódica y una cifra en el anteperíodo.

2. Como $0{,}8\overline{3}$ es equivalente a $\frac{5}{6}$, ubicamos $0{,}8\overline{3}$ en la posición de la fracción $\frac{5}{6}$.



Aprende

- Para **representar una fracción como número decimal**, divides el numerador por el denominador de la fracción.
- Para **representar un número decimal como fracción**, debes considerar lo siguiente:

	Finitos	Infinitos	
		Periódicos	Semiperiódicos
Numerador	Número decimal sin la coma.	Resta entre el número decimal sin la coma y la parte entera de él.	Resta entre el número decimal sin la coma y el número que está antes del período, sin la coma.
Denominador	Valor de una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales tenga el número.	Número formado por tantos 9 como cifras tenga el período.	Número formado por tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como cifras tenga el anteperíodo.

Actividades

1. Jaime trabaja en un almacén. Le encantan las matemáticas y le gusta ponerlas en práctica con sus clientes cambiando la forma en que piden los productos.

   Así, si alguien compra $\frac{1}{2}$ kg de limones, él dice «aquí tiene los 0,5 kg que pidió».

   Hay que estar muy pendiente para no confundirse con su juego de palabras.

   Escribe las frases que crees que diría Jaime si alguien compra los siguientes productos:

   a. $3\frac{1}{2}$ kg de peras.

   b. $\frac{1}{2}$ L de leche.

   c. 2,5 kg de papas.

   d. $\frac{3}{4}$ kg de carne.

2. Representa los siguientes números como fracción o número decimal según corresponda.

   a. $10{,}5$

   b. $-\frac{3}{5}$

   c. $0{,}0\overline{7}$

   d. $-0{,}\overline{2}$

   e. $15{,}\overline{12}$

   f. $2\frac{1}{4}$

   g. $-\frac{11}{10}$

   h. $\frac{16}{3}$

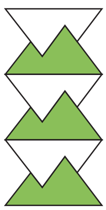
   i. $-2{,}6\overline{4}$

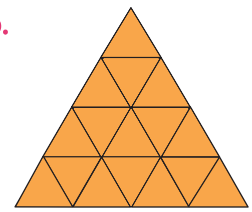
3. Representa los siguientes números en la recta numérica.

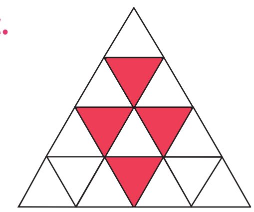
$2{,}5$ $\frac{5}{4}$ $-1{,}75$ $-\frac{1}{4}$ $-2{,}5$ $0{,}2\overline{5}$ $-\frac{3}{4}$ $-\frac{8}{4}$ $1{,}\overline{5}$

4. ¿Es cierto que si se mezclan 15 kg de jugo en polvo concentrado con 270 L de agua se obtiene el mismo gusto que al mezclar 35 kg del mismo jugo en polvo con 450 L de agua? Comenta con tu curso.

5. Identifica la fracción que representa la parte pintada de cada figura respecto de la figura completa y escríbela como un número decimal.

a. 

b. 

c. 

6. Francisco representó la fracción $\frac{5}{15}$ con el número decimal 0,33; en cambio, Daniela asegura que la parte entera es 0 y el período es 3. Explica por qué lo que dice Daniela es más preciso. ¿En qué caso Francisco tendría razón?

7. Laura necesita hacer algunas perforaciones con taladro para reparar una instalación eléctrica de su casa. Para ello, le pide a Gabriel la broca de 0,125" (0,125 pulgadas) y la de 0,16" (0,16 pulgadas). Las medidas de las brocas que tienen son las siguientes:

Nº broca	1	1,5	2	3,2	4
Diámetro (pulgadas)	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{25}$

a. ¿Cuáles brocas debe darle Gabriel a Laura?

b. ¿Existen brocas equivalentes?

- La broca, también denominada mecha, es una pieza de metal de corte que se utiliza siempre vinculada a una herramienta mecánica, como un taladro o cualquier otra máquina afín. Esta última es la que hace girar la broca para hacer orificios, principalmente, o agujeros en diferentes materiales.

Cuaderno de Actividades
Páginas 18 y 19.

Reflexiona y responde

- ¿En qué te fijas para poder representar fracciones como números decimales y viceversa? Da un ejemplo.
- ¿Crees que es importante complementar tus ideas con las de otros para obtener distintas soluciones de un problema? ¿Por qué?

Adición y sustracción de números racionales

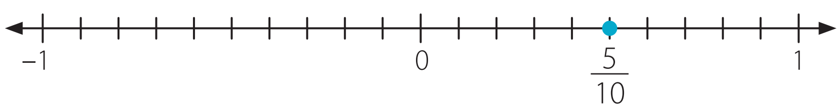
Considerando las dimensiones de la pantalla de cine, responde lo siguiente:

- ¿Cuánto mide el ancho?
- ¿Cuánto mide el alto?
- ¿Cómo calcularías su perímetro?

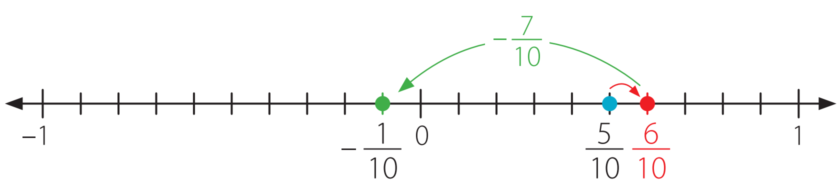
Ejemplo 1

Representa en la recta numérica la adición $\frac{1}{2} + 0{,}1 + \left(-\frac{7}{10}\right)$.

1. Ubicamos $\frac{1}{2}$ en la recta numérica, que es equivalente a $\frac{5}{10}$.



2. Sumamos 0,1. Luego, sumamos $\left(-\frac{7}{10}\right)$.



Por lo tanto, $\frac{1}{2} + 0{,}1 + \left(-\frac{7}{10}\right) = -\frac{1}{10} = -0{,}1$.

Ejemplo 2

Calcula el valor de la expresión $\left(-\frac{5}{6}\right) + 3\frac{3}{4} - 0{,}4$.

1. Expresamos el número mixto como una fracción y resolvemos la adición. Para ello, calculamos el mcm entre los denominadores, que en este caso es 12, y calculamos la suma en el numerador.

$$\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{15}{4} = \frac{(-10) + 45}{12} = \frac{35}{12}$$

2. Expresamos 0,4 como una fracción y calculamos la resta.

$$\frac{35}{12} - \frac{4}{10} = \frac{175 - 24}{60} = \frac{151}{60}$$

Ejemplo 3

En una campaña de recolección de alimentos no perecibles, lo reunido se clasifica y se ubica en diferentes cajas. En la selección de legumbres se tienen 4 paquetes en total: de 2,5 kg, de $\frac{3}{4}$ kg, de 1 kg y de $\frac{7}{2}$ kg. ¿Cuántos kilogramos de legumbres se han reunido?

1. Sumamos los kilogramos de cada paquete de legumbres. Para ello, podemos expresar los valores como números decimales.

$$2{,}5 + \frac{3}{4} + 1 + \frac{7}{2} = 2{,}5 + 0{,}75 + 1 + 3{,}5 = 7{,}75$$

2. También podemos expresar el resultado como número mixto:

$$7{,}75 = 7\frac{3}{4}$$

Luego, se han reunido 7,75 kg, o $7\frac{3}{4}$ kg de legumbres.

Aprende

- Como los números racionales pueden ser positivos, negativos o cero, al **resolver adiciones y sustracciones** entre ellos, es posible utilizar las mismas propiedades que en los números enteros para determinar el signo de la suma o de la resta.
- Si se tiene una adición o una sustracción en la que se combinan números decimales y fracciones, se pueden representar los términos involucrados como **números decimales o fracciones**, y luego resolver la operación correspondiente.

Actividades

1. Un grupo de amigos tiene dos torres de tarjetas, una morada y otra verde. El juego consiste en sumar el número de la tarjeta morada con el número de la tarjeta verde. En la tabla se muestran los números de cada tarjeta y la respuesta de los jugadores.

Jugador			Respuesta
Laura	$-0{,}03$	$\frac{1}{8}$	$0{,}095$
Julián	$1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
Boris	$1{,}5$	$-0{,}25$	$-1{,}75$
Gabriela	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-2{,}1$

a. ¿A qué conjunto numérico pertenecen los números de las tarjetas?

b. Clasifica el número de cada tarjeta en fracción, número decimal o número mixto.

c. ¿Todos los jugadores respondieron correctamente? Justifica.

2. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $\frac{7}{4} + 5{,}5$

b. $6{,}7 + 3{,}4 - 2{,}2$

c. $0{,}\overline{2} + \frac{1}{2}$

d. $\frac{9}{2} - 1{,}\overline{52}$

e. $\frac{3}{7} + 2 - \frac{4}{5}$

f. $10{,}5 - 0{,}\overline{2}$

g. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

h. $0{,}12 - 0{,}\overline{1} + 0{,}\overline{12}$

i. $3\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5} - 4$

3. De un computador con un peso promedio de 21 kg es posible reciclar 11,2 kg de metales entre hierro, cobre y aluminio; 4,6 kg de vidrio, y 4,18 kg de plásticos. ¿Cuántos kilogramos de materiales del computador se pueden recuperar?

4. En un grupo de 36 personas, $\frac{1}{3}$ de ellos tienen un *smartphone* marca Huawei, $\frac{1}{12}$ un iPhone y $\frac{1}{2}$ un Samsung. El resto de ellos no tiene teléfono celular.

a. ¿Cuál es la fracción de ese grupo de personas que poseen *smartphone*?

b. ¿Cuántos de ellos no tienen teléfono celular?

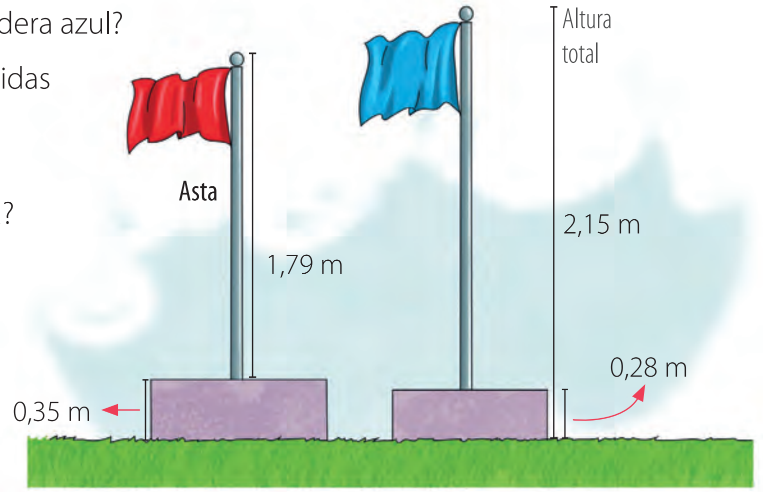
c. ¿Cuáles crees que son las ventajas y desventajas del uso de teléfono celular? Comenta con tu curso.

5. A partir de la siguiente imagen, responde las preguntas.

a. ¿Cuál es la altura del asta de la bandera azul?

b. ¿Cuál es la diferencia entre las medidas de las astas de las dos banderas?

c. ¿Cuánto más de altura total mide la bandera azul que la bandera roja?



6. Reúnete con un compañero o compañera y resuelvan el siguiente problema.

Para medir la masa de los planetas se toma como unidad de medida la Tierra. En la imagen se muestra qué fracción de la masa de la Tierra tienen algunos planetas del sistema solar.

a. ¿Cuál de los planetas tiene menor masa?

b. Si la masa aproximada de la Tierra es 6 000 000 000 000 000 000 000 000, ¿cuál es la diferencia entre las masas de Marte y Mercurio?

c. Si se suman las masas de todos los planetas de la imagen, ¿superan la masa de la Tierra?

Cuaderno de Actividades
Páginas 20 y 21.

Reflexiona y responde

- ¿Qué pasos sigues para adiciones y sustracciones con números racionales? Explica.
- ¿Crees que el trabajar en grupo aporta a tu proceso de aprendizaje?, ¿por qué?

Multiplicación y división de números racionales

Un edificio fue diseñado de tal manera que algunos pisos están en la planta subterránea. Además, la altura de cada piso sobre el suelo es la misma.

La extensión subterránea del edificio es de 6,72 m, lo que equivale a $\frac{2}{5}$ de la altura sobre el suelo del edificio.

- Observa cómo Karen y Nicolás calcularon la altura de cada piso sobre el suelo del edificio.

Karen

Altura del edificio sobre el suelo:

$6{,}72 : 0{,}4 = 16{,}8$

Altura de cada piso sobre el suelo:

$16{,}8 : 6 = 2{,}8$

Nicolás

Altura del edificio sobre el suelo:

$6{,}72 : \frac{2}{5} = 16{,}8$

Altura de cada piso sobre el suelo:

$\frac{168}{10} : 6 = \frac{14}{5} = 2{,}8$

- ¿Están correctos los desarrollos de Karen y Nicolás? Justifica.
- ¿Cuál de los dos procedimientos crees que es más conveniente? ¿Por qué?

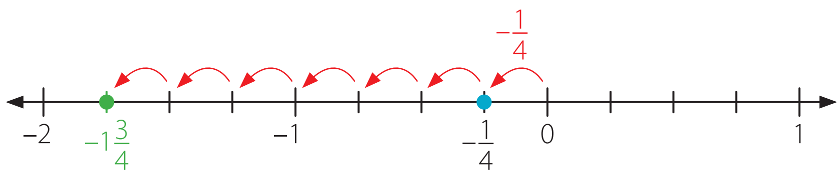
Ejemplo 1

Representa en la recta numérica la multiplicación $7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$.

1. Ubicamos $\left(-\frac{1}{4}\right)$ en la recta numérica.

2. Como $7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$,

   representamos la suma en la recta numérica.

3. 

   Por lo tanto, $7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1\frac{3}{4}$.

Ejemplo 2

Calcula el valor de la expresión $\left(2{,}\overline{3} : \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{7}$.

- El **inverso multiplicativo** de un número a distinto de cero es aquel que al multiplicarlo por a, resulta 1. Es decir, el inverso multiplicativo de a es $\frac{1}{a}$, ya que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

1. Representamos el número decimal periódico como una fracción.

$$2{,}\overline{3} = \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

2. Resolvemos la operación del paréntesis. Para ello, multiplicamos $\frac{7}{3}$ por el inverso multiplicativo de $\frac{4}{5}$ para calcular el cociente.

$$\frac{7}{3} : \frac{4}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{12}$$

3. Resolvemos la multiplicación y simplificamos.

$$\frac{35}{12} \cdot \frac{4}{7} = \frac{140}{84} = \frac{5}{3}$$

Aprende

- Al resolver multiplicaciones y divisiones de números racionales puedes aplicar la **regla de los signos** utilizada en los números enteros.
- Para **resolver multiplicaciones y divisiones de fracciones y números decimales**, puedes expresar los términos involucrados como una fracción o un número decimal, y luego resolver la operación correspondiente.

Actividades

1. **Resuelve las siguientes operaciones.**

   a. $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{8}$

   b. $\left(-\frac{1}{3}\right) : \frac{3}{4}$

   c. $1,3 \cdot 2,8 : 0,4$

   d. $\frac{7}{36} : (-5) + \frac{5}{4}$

   e. $\frac{1}{10} \cdot \frac{8}{5} : 2\frac{1}{2}$

   f. $\left(\frac{3}{4} \cdot 1,8\right) : 2,\overline{6}$

   g. $(-0,\overline{3}) \cdot \left(-\frac{8}{13}\right)$

   h. $6\frac{2}{5} : \left(-3\frac{1}{10}\right) - 1,5$

   i. $\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) : \left(\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)\right)$

2. **Resuelve los siguientes problemas.**

   a. En un embarque llegan 120 cajas de 9,45 kg cada una. ¿Cuál es el peso total de todas las cajas?

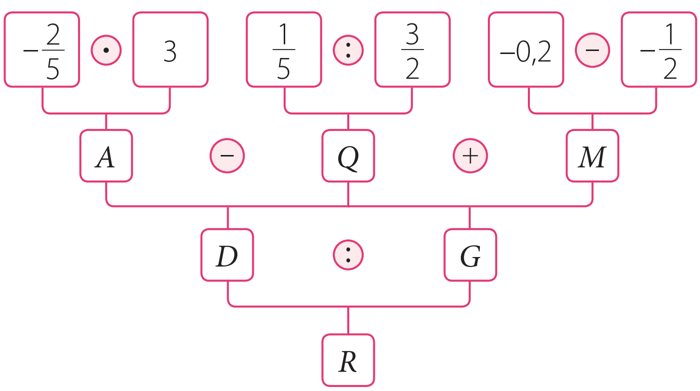
   b. El ancho de un rectángulo mide $2\frac{17}{20}$ cm y el largo 9,03 cm. ¿Cuál es su área?

   c. Se quiere repartir $\frac{21}{2}$ kg de azúcar en sacos de 0,45 kg. ¿Cuántos sacos se alcanzan a llenar?

   d. Guillermo recolectó 8 cajas llenas de revistas para reciclar de $\frac{17}{4}$ kg cada una. Fabiola, por su parte, juntó 6 cajas de $6\frac{1}{5}$ kg. Si se habían propuesto reunir 80,5 kg entre ambos, ¿lograron la meta? ¿Cuánto les falta o cuánto les sobra?

3. **Plantea una situación en la que debas utilizar la división de números racionales para su solución. Luego, resuélvela.**

4. **A partir del esquema, determina el número que representa cada letra.**



5. **En el colegio, el jardinero ocupa $\frac{2}{3}$ L de agua para regar una planta y tiene un bidón con 16 L.**

   a. Plantea la operación que debes efectuar para saber la cantidad de plantas que alcanza a regar el jardinero.

   b. ¿Cómo utilizarías el inverso multiplicativo para resolver la operación?

   c. ¿Cuántas plantas riega el jardinero con los 16 L de agua?

6. Una impresora tiene un sistema de cuatro cartuchos: tres de color y uno negro. Los cartuchos de color contienen 12,5 mL de tinta cada uno y el cartucho negro, 22,5 mL. Para recargar los cartuchos de color hay tres envases de 62,5 mL y para recargar el negro, se dispone de un envase de 180 mL.

   a. ¿Cuántos cartuchos de color se pueden recargar con los tres envases?

   b. ¿Cuántas recargas del cartucho negro se pueden hacer?

7. ¿Cómo puedes construir un fractal con papel? Para realizar la actividad, reúnanse en parejas y sigan las instrucciones. Luego respondan.

Necesitan: ▶ Papel rectangular, regla, lápiz y tijeras.

1 Recorten un rectángulo de tal forma que el largo sea el doble del ancho. Luego, doblen por la mitad y marquen bien el doblez.

2 Hagan dos cortes a $\frac{1}{4}$ del borde y de profundidad la mitad de la longitud original.

3 Doblen y plieguen la parte recortada hacia arriba por dentro.

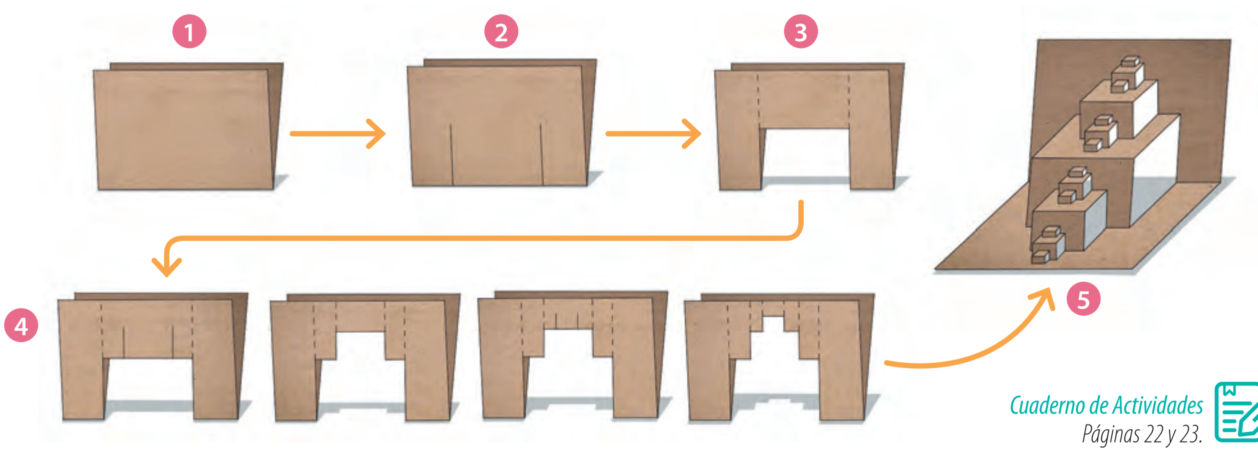
4 Repitan el proceso. Realicen dos cortes a $\frac{1}{4}$ del pliegue y de longitud $\frac{1}{2}$ del anterior pliegue.

5 Desdoblen todo para ver en forma completa el fractal.

   a. ¿Cómo se observa el uso de los números racionales en la construcción del fractal?

   b. ¿Cómo determinaron la distancia que debía haber entre cada corte del papel? Comenten con el curso.

- Un **fractal** es un objeto cuya estructura se repite a diferentes escalas. Es decir, por mucho que nos acerquemos o alejemos del objeto, observaremos siempre la misma estructura. Los fractales también existen en la naturaleza, por ejemplo, los copos de nieve.



Cuaderno de Actividades
Páginas 22 y 23.

Reflexiona y responde

- ¿Qué dificultades tuviste al multiplicar y dividir números racionales?, ¿cómo puedes superarlas?
- ¿Crees que ayudó a tu aprendizaje escuchar las opiniones de otros al trabajar en equipo?

Evaluación Lección 2

1. Representa los siguientes números como fracción o número decimal según corresponda.

a. $2\frac{1}{8}$

b. 0,63

c. $-\frac{5}{9}$

d. $5{,}2\overline{6}$

e. $2{,}\overline{37}$

f. $-1{,}55$

2. En Estados Unidos se usan monedas con los siguientes valores:

1 dólar

50 centavos

50 centavos = 0,5 dólar

Quarter

1 quarter = 25 centavos
= 0,25 dólar

Dime

1 dime = 10 centavos
= 0,1 dólar

Nickel

1 nickel = 5 centavos
= 0,05 dólar

Penny

1 penny = 1 centavo
= 0,01 dólar

a. ¿A cuántos pennies equivalen 2 dólares?

b. ¿A cuántos centavos equivalen 5 dólares?

c. ¿A cuántos dimes equivale 1 quarter?

d. ¿Cuántas monedas de 50 centavos se requieren para reunir 240 nickels?

e. ¿Cuántos quarters se requieren para reunir 1,5 dólares?

3. María José distribuye su horario de trabajo de la siguiente manera: el lunes trabaja $7\frac{1}{2}$ h, el martes, $5\frac{1}{4}$ h, el miércoles, 6,75 h, el jueves, 5 h y el viernes $4\frac{1}{3}$ h.

a. ¿Cuál es el día en que María José trabaja más horas?

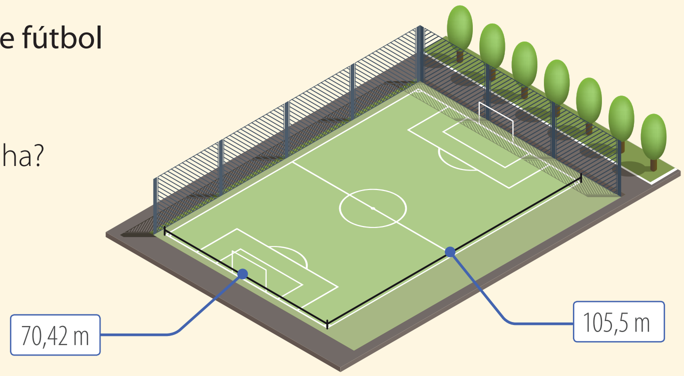
b. ¿Cuántas horas a la semana trabaja María José?

c. ¿Cuántas horas más trabaja el miércoles que el viernes? ¿A cuántos minutos más equivale?

4. Las dimensiones de una cancha de fútbol son las siguientes:

   a. ¿Cuál es el perímetro de la cancha?

   b. ¿Cuál es el área de la cancha?



5. Si el área de un rectángulo es de 0,7 cm^2 y su largo mide 3,5 cm, ¿cuánto mide el ancho del rectángulo?

6. Del total de páginas de un libro, Bárbara lee por día siempre el doble de lo del día anterior. Si el lunes leyó $\frac{1}{7}$ de la cantidad de páginas del libro, ¿en cuántos días lo terminará?

7. La memoria de la *tablet* de Sofía tiene $\frac{7}{12}$ de su capacidad disponible para guardar música, fotos, aplicaciones, etc. Si Sofía ocupa $\frac{1}{3}$ de la memoria con música, $\frac{2}{11}$ con fotos, ¿qué fracción del espacio disponible le queda en la memoria?

8. Un periódico dedica $\frac{2}{5}$ de sus páginas a información de actualidad, $\frac{3}{8}$ a artículos de opinión y el resto a publicidad. ¿Qué fracción del total de páginas corresponde a publicidad?

9. El área de un terreno de forma rectangular es $\frac{32}{6}$ m^2. Si la longitud del ancho del terreno es $\frac{14}{3}$ m, ¿cómo puedes calcular el largo del terreno? ¿Cuánto mide?

10. Juliana debe recorrer 29,6 km en bicicleta para ir a visitar a sus abuelos. Si se detiene a descansar y beber agua cada 3,8 km, ¿cuántas veces descansa Juliana en el camino?

11. Un télefono celular de última tecnología con una capacidad de 16 GB tiene disponibles 12,759 GB para almacenamiento debido al sistema operativo. ¿Cuántos GB ocupa el sistema operativo de ese celular?

Cuaderno de Actividades
Páginas 24 y 25.

Reflexiona y responde

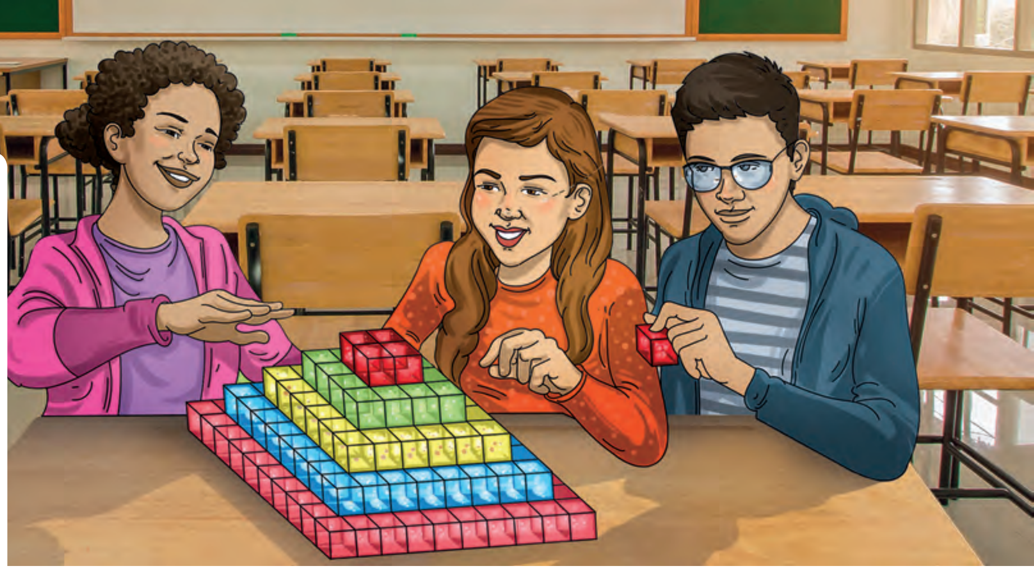
- ¿Qué sabías de las fracciones y números decimales?
- ¿Cómo relacionas lo que ya sabías con lo que sabes ahora?
- ¿Cómo podrías demostrar lo que aprendiste en esta lección? Nombra algunos ejemplos.

Lección 3
Potencias, raíz cuadrada y porcentajes

Multiplicación de potencias

Un grupo de estudiantes construyen un juego didáctico para presentarlo en la feria de innovación del colegio.

La idea consiste en formar una pirámide utilizando cubos de igual tamaño y considerando que cada piso está completamente cubierto de cubos.



- ¿Cuántos cubos hay en cada piso de la pirámide? ¿Qué regularidad puedes identificar en estas cantidades?
- Expresa los números que obtuviste en la pregunta anterior como una potencia.
- ¿Cuántos cubos hay en total en la pirámide?
- Si se quiere agregar un piso más en la base de la pirámide, ¿cuántos cubos se deberían agregar para respetar su formación?

En esta lección comprenderás la multiplicación y la división de potencias, estimarás la raíz cuadrada de un número natural y resolverás problemas que involucran variaciones porcentuales.

Ejemplo 1

Representa la multiplicación iterada 4 • 4 • 4 como una potencia.

1. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ → Cantidad de veces que se repite el factor.

   Factor que se repite.

   Observamos que el factor 4 se repite 3 veces. Luego, identificamos lo que representa cada parte en la potencia.

2. $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ → Valor de la potencia

   → Exponente

   → Base

   Calculamos el valor y utilizamos los términos base, exponente y valor de la potencia.

Por lo tanto, 4 elevado a 3 es igual a 64.

Identifica el exponente y la base de cada potencia y luego calcula su valor.

3^5 4^2 7^3 8^2 5^4 9^1 2^6

Ejemplo 2

En la imagen se muestra un sector cuadrado de un fundo. ¿Cuál es su área?

1. Para calcular el área de un cuadrado se eleva a dos la medida de cualquiera de sus lados.

2. Aplicamos la fórmula del área:
   $(6\text{ km})^2 = 6\text{ km} \cdot 6\text{ km} = 36\text{ km}^2$.
   Finalmente, el área del sector es 36 km^2.

Aprende

Cuando en una **multiplicación** hay factores iguales y se repiten una cantidad finita de veces, se puede escribir utilizando una potencia. En una potencia se identifican la **base**, el **exponente** y el **valor de la potencia**.

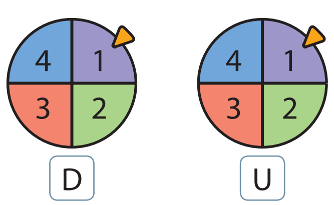
Si $a, n, b \in \mathbb{N}$, la **potencia** a^n corresponde a:

Exponente — Valor de la potencia

$$\text{Base} \longrightarrow a^{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = b \dashrightarrow \text{Se lee } a \text{ elevado a } n.$$

Ejemplo 3

Determina la cantidad de números de 2 cifras que se pueden representar al hacer girar simultáneamente las ruletas.



Cada ruleta tiene 4 opciones. La primera ruleta determina la cifra de las decenas (D) del número representado y la segunda, la cifra de las unidades (U).

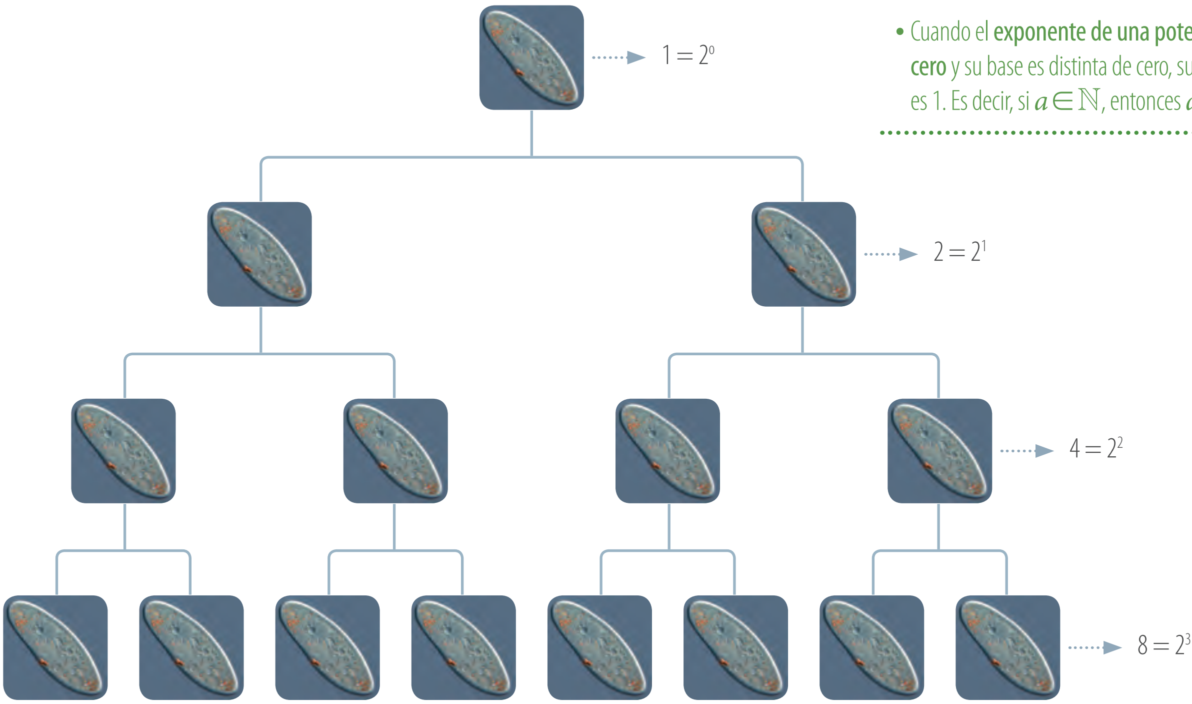
1. Por cada número que resulte al hacer girar la primera ruleta hay 4 opciones para la cifra de las decenas. Por ejemplo, si obtenemos un 1, los números que podemos formar al girar la segunda ruleta son: 11, 12, 13 y 14.

2. Luego, si giramos simultáneamente las ruletas, podemos representar $4 \cdot 4$ números de dos cifras o equivalentemente $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ números.

Ejemplo 4

Un paramecium es un organismo unicelular que se reproduce por división simple, es decir, se divide en 2 cada vez. Representa la situación con un diagrama de árbol y con potencias.

- Cuando el **exponente de una potencia es cero** y su base es distinta de cero, su valor es 1. Es decir, si $a \in \mathbb{N}$, entonces $a^0 = 1$.



- *¿Crees que utilizar representaciones pictóricas ayuda a comprender una situación? ¿Por qué?*
- *¿Cómo puedes resolver una multiplicación de potencias de igual base? Explica y da un ejemplo.*

Ejemplo 5

Representa como una potencia el producto $3 \cdot 3^2 \cdot 2^3$.

$$\begin{aligned}
3 \cdot 3^2 \cdot 2^3 &= (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 2^3 \\
&= (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) && \text{Desarrollamos las potencias.} \\
&= (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) && \text{Asociamos los factores.} \\
&= (3 \cdot 2)^3 && \text{Representamos como potencia.} \\
&= 6^3
\end{aligned}$$

Representa cada multiplicación como una potencia y calcula su valor.

$2^2 \cdot 2 \cdot 2^3$ $\quad 5^3 \cdot 3^3$ $\quad 1^3 \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot 1$ $\quad 10^2 \cdot 10^2$

Aprende

- Al **multiplicar potencias de igual base**, se conserva la base y se suman los exponentes.

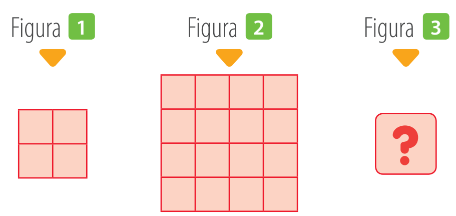
$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{(n+m) \text{ factores}} = a^{n+m}, \text{ con } a, n, m \in \mathbb{N}.$$

- Al **multiplicar potencias de igual exponente**, se multiplican las bases y se conserva el exponente.

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ factores}} = (a \cdot b)^n, \text{ con } a, b, n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 6

Las figuras están formadas por cuadrados iguales. Si se continúa con la regla de formación que va duplicando el lado de cada figura respecto de la anterior, ¿cuántos cuadrados formarán la figura 3?



1. La figura 1 tiene 2^2 cuadrados y la figura 2, $(2^2)^2$ cuadrados. Al continuar con la regla de formación, la figura 3 tendrá $(2^3)^2$ cuadrados.
2. Para calcular la cantidad de cuadrados, aplicamos las propiedades de las potencias.

$$(2^3)^2 = \underbrace{2^3 \cdot 2^3}_{\text{Multiplicación de potencias de igual base}} = 2^{3+3} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

La figura 3 estará formada por 64 cuadrados.

Aprende

La **potencia de una potencia** se puede representar como una potencia que conserva la base original y su exponente es igual al producto de los exponentes involucrados.

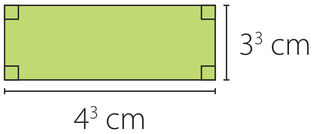
$$(a^n)^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factores}}{}^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot \ldots \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{(n \cdot m) \text{ factores}} = a^{n \cdot m}, \text{ con } a, n, m \in \mathbb{N}.$$

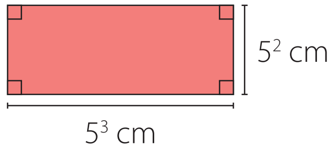
Representa cada expresión como una potencia y calcula su valor.

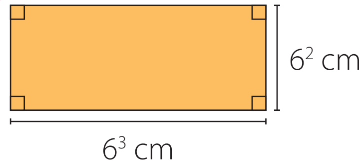
$(3^3)^2$ $(4^3)^2$ $(2^2)^4$ $(10^2)^2$

Actividades

1. Representa con una potencia el área (A) de los siguientes rectángulos.

a.


b.


c.


2. Representa los factores de cada multiplicación como una potencia, luego aplica la propiedad correspondiente y calcula el resultado. Guíate por los ejemplos.

$8 \cdot 4 = 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

$4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$

a. $3 \cdot 27$
b. $25 \cdot 125$
c. $9 \cdot 27 \cdot 27$
d. $25 \cdot 25 \cdot 125$
e. $16 \cdot 64 \cdot 4$
f. $7 \cdot 49 \cdot 343$
g. $27 \cdot 64$
h. $36 \cdot 81$
i. $4 \cdot 25 \cdot 121$
j. $100 \cdot 144 \cdot 9$

3. Evalúa si cada igualdad es verdadera o falsa.

a. $2^3 + 2^5 = 2^8$
b. $(2^3 \cdot 2^5)^2 = 2^6 \cdot 2^{10}$
c. $(3^2 + 3^3)^2 = 3^4 + 3^6$

4. Expresa cada número como producto de potencias de números primos.

Ejemplo ▸ $180 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

a. 25 000
b. 128
c. 2 700
d. 3 200
e. 1 600
f. 96

5. Analiza cada enunciado y responde.

a. Si la base de una potencia es 4 y el valor de esta es 1 024, ¿cuál es su exponente?
b. Si el valor de una potencia es 512 y su base es 8, ¿cuál es su exponente?

6. Macarena analiza el grado de descomposición de un alimento y considera que está contaminado si la cantidad de bacterias por milímetro cuadrado es igual o superior a 512. Si en un inicio hay 1 bacteria por milímetro cuadrado y se divide en 2 en forma sucesiva cada 10 min, ¿cuánto tiempo demorará el alimento en estar descompuesto?

7. Un grupo de 15 estudiantes decide organizar una actividad de integración. Para convocar a la mayor cantidad de personas, cada alumno debe invitar a tres, y cada una de estas personas debe llevar a otras tres personas. ¿Cuántos participantes habrá en la actividad?

8. Aplica las propiedades y resuelve.

a. $3^2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 5^2$

b. $1^3 \cdot 7^3 - 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2$

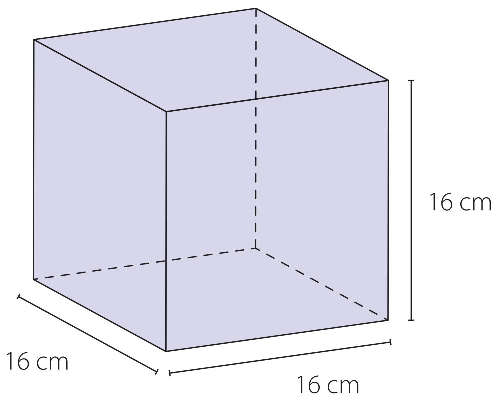
c. $3^3 \cdot 2^3 \cdot 4^3 - 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$

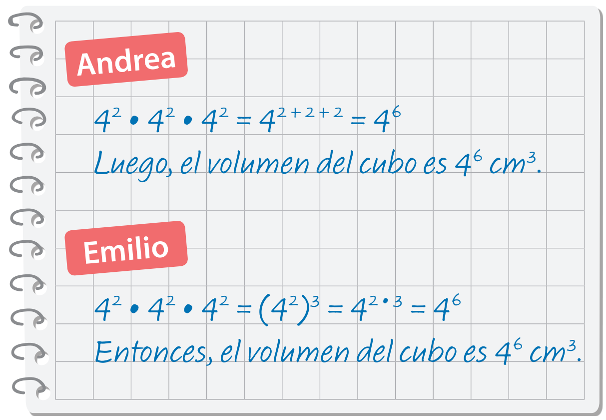
d. $5^3 \cdot 8^3 + 4^2 \cdot 7^2 + 6^3 \cdot 5^3$

e. $10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^2 - 10^3 \cdot 10^2$

f. $12^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^3$

9. Andrea y Emilio están calculando el volumen del cubo que se muestra y cada uno realiza distintos procedimientos.





a. ¿Cómo expresarías la medida de la arista del cubo usando una potencia de base 4?

b. ¿Son correctos los procedimientos seguidos por Andrea y Emilio? ¿En qué se diferencian?

c. ¿Qué procedimiento aplicarías tú? ¿Por qué?

10. Analiza los siguientes procedimientos para calcular el valor de la expresión 3^{2^0}.

Primera opción	Segunda opción
$3^{2^0} = 3^{(2^0)} = 3^1 = 3$	$3^{2^0} = (3^2)^0 = 3^0 = 1$

¿Cuál opción consideras correcta? Compara con tu curso y argumenta tu respuesta.

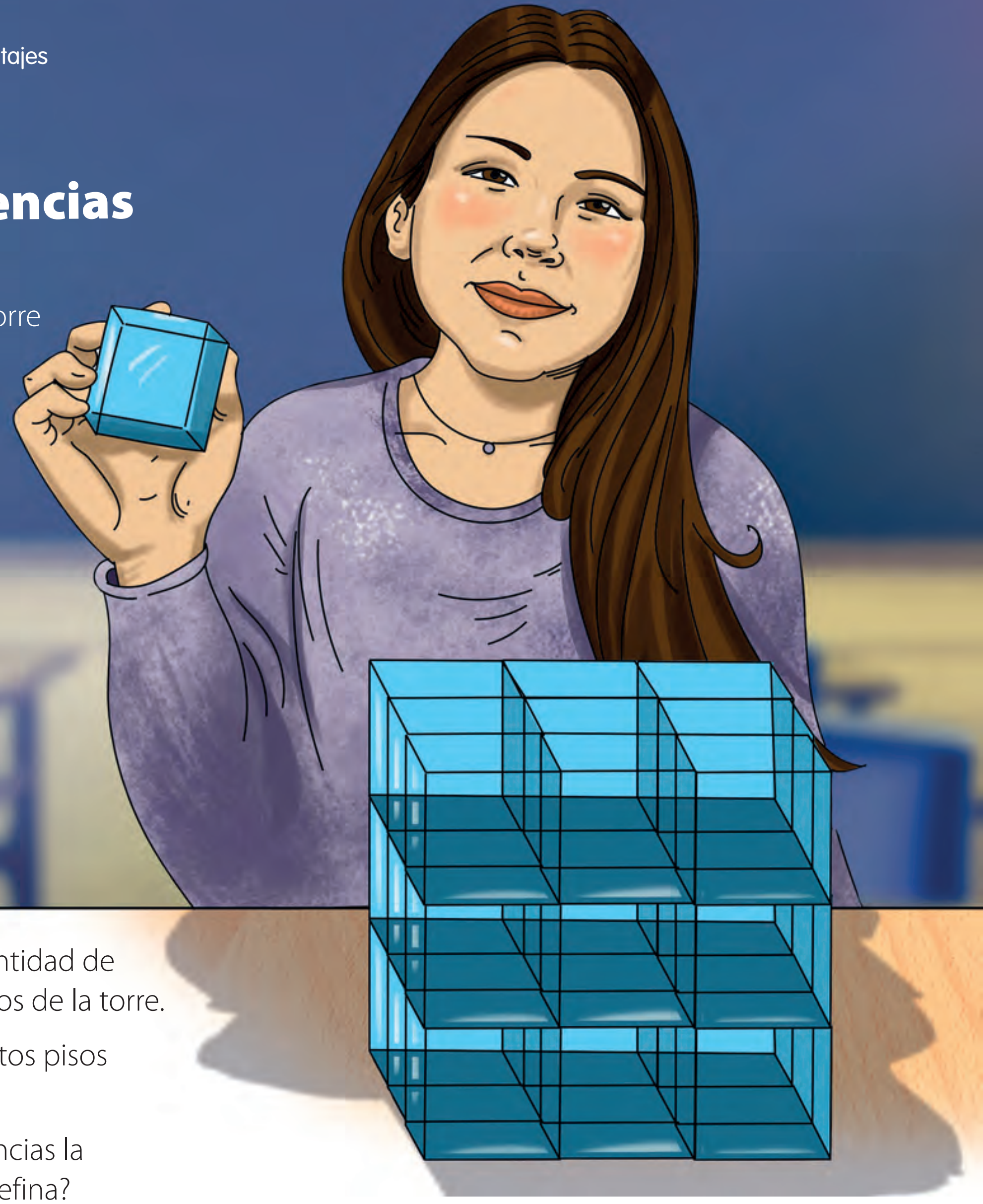
Cuaderno de Actividades
Páginas 26 y 27.

Reflexiona y responde

- ¿Qué sabías de las potencias? ¿Qué conocimientos nuevos aprendiste?
- Explica cómo resolver una multiplicación de potencias.
- ¿Tuviste dificultades para argumentar tus ideas? ¿Por qué?

División de potencias

Josefina está diseñando una torre con cubos para un proyecto sustentable de un edificio.



- Representa como potencia la cantidad de cubos que hay en uno de los pisos de la torre.
- Si Josefina tiene 81 cubos, ¿cuántos pisos tendrá su torre?
- ¿Cómo expresarías usando potencias la cantidad de cubos que tiene Josefina?

Ejemplo 1

Determina la medida del ancho del rectángulo si su área es igual a 10^2 cm^2.

5^2 cm

1. Como el área de un rectángulo se calcula multiplicando la medida de sus lados, podemos resolver la división $10^2 : 5^2$ para determinar la medida del ancho.
2. La división anterior la representaremos de la siguiente forma:

$$10^2 : 5^2 = \frac{10^2}{5^2} = \frac{10 \cdot 10}{5 \cdot 5} = \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} = \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Por lo tanto, el ancho del rectángulo mide 4 cm.

Ejemplo 2

Representa como una potencia el resultado de $(4^5 : 4^2) : 2^3$.

$$\boxed{(4^5 : 4^2)} : 2^3 = \left(\frac{4^5}{4^2}\right) : 2^3$$

Escribimos como fracción y simplificamos.

$$= \left(\frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}\right) : 2^3$$

$$= \boxed{4^3 : 2^3}$$

Escribimos como fracción y desarrollamos las potencias.

$$= \frac{4^3}{2^3}$$

$$= \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$= \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{2}$$

$$= (4 : 2) \cdot (4 : 2) \cdot (4 : 2)$$

$$= (4 : 2)^3$$

$$= 2^3$$

- *Representa cada división como una potencia y calcula su valor.*

  $5^4 : 5$ $\quad$ $6^3 : 2^3$ $\quad$ $3^5 : 3^2 : 1^3$ $\quad$ $4^6 : 2^6$

- *¿Reconoces alguna relación entre la división y la multiplicación de potencias de igual base? ¿Y de igual exponente?*

Aprende

- Al **dividir potencias de igual exponente**, se dividen las bases y se conserva el exponente.

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}^{n \text{ factores}}}{\underbrace{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)}_{n \text{ factores}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot ... \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a : b) \cdot (a : b) \cdot ... \cdot (a : b)}_{n \text{ factores}} = (a : b)^n$$

con $a, b, n \in \mathbb{N}$.

- Al **dividir potencias de igual base**, se conserva la base y se restan los exponentes.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a)}^{n \text{ factores}}}{\underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{m \text{ factores}}} = \frac{\overbrace{\cancel{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}}^{m \text{ factores}} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}^{(n-m) \text{ factores}}}{\underbrace{\cancel{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}}_{m \text{ factores}}} = a^{n-m}$$

con $a, n, m \in \mathbb{N}$ y $n \geqslant m$.

Actividades

1. Representa cada división como una potencia y calcula su valor.

 a. $2^3 : 2^2$
 b. $3^3 : 3^3$
 c. $5^3 : 5 : 5^2$
 d. $6^3 : 6^2 : 6$
 e. $72^3 : 6^3 : 4^3$
 f. $7^3 : 7$
 g. $12^2 : 4^2 : 3^2$
 h. $8^3 : 8^2 : 8$
 i. $60^2 : 5^2 : 3^2$
 j. $9^3 : 9^2 : 9$
 k. $15^2 : 3^2$
 l. $64^3 : 16^3$

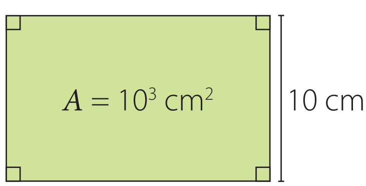
2. Representa los términos de cada división como una potencia, luego aplica la propiedad correspondiente y calcula el resultado. Guíate por los ejemplos.

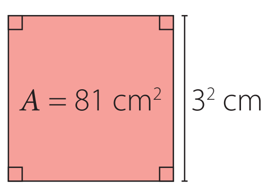
$$64 : 16 = 4^3 : 4^2 = 4^{3-2} = 4$$

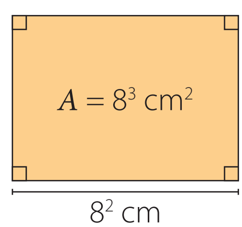
$$81 : 9 = 9^2 : 3^2 = (9 : 3)^2 = 3^2 = 9$$

 a. $64 : 4$
 b. $125 : 5$
 c. $343 : 49 : 7$
 d. $729 : 9 : 81$
 e. $216 : 6 : 6$
 f. $1\,000 : 100 : 10$
 g. $625 : 25$
 h. $225 : 9$
 i. $512 : 64$
 j. $512 : 8 : 2$
 k. $400 : 16 : 25$
 l. $256 : 128$

3. Determina la medida del lado que falta en cada figura sabiendo el valor del área (A) en cada caso.

a.


b.


c.


4. Una sustancia se desintegra a medida que transcurre el tiempo. De este modo, luego de media hora queda la mitad de la cantidad inicial. En un comienzo se tienen 64 g de la sustancia.

 a. ¿Cuántos gramos quedarán después de una hora? Expresa el resultado como una potencia.
 b. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que quede solo 1 g de sustancia?

5. Una bacteria se reproduce dividiéndose en 2. Si la división se origina cada 1 h e inicialmente había una sola bacteria, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que haya 64?

6. Un tipo de bacteria se duplica cada 6 min. ¿Cuántas bacterias había en un comienzo si luego de una hora hay 2 048?

7. Resuelve los siguientes problemas.
   a. Si Javier divide 3^5 en 27, ¿qué resultado debe obtener?
   b. Emilia divide 4^4 en 16 y obtiene 8. ¿Es correcto su resultado?
   c. Si se divide 1 000 en 2^3, ¿qué resultado se obtiene?
   d. Al dividir 6^4 en 3^4 se obtiene 16. ¿Es correcto?
   e. Andrés divide 6^3 en 2^3. ¿Qué resultado debe obtener?

8. Analiza la resolución de cada ejercicio. Luego, detecta el error cometido y corrígelo.
   a. $15^3 : 15 : 15 = 15^{3-0-0} = 15^3$
   b. $18^3 : 2^3 : 3^3 = (18 - 2 - 3)^3 = 13^3$
   c. $20^3 : 20^3 = 20^{3:3} = 20$
   d. $11^2 : 11^2 = (11 - 11)^2 = 0^2$
   e. $13^3 : 13^2 : 13 = 13^{3+2+1} = 13^6$
   f. $25^3 : 5^3 = (25 : 5)^{3-3} = 5^0$

9. Reúnete con un compañero o compañera, analicen la siguiente igualdad y luego respondan.

$$3^{a-2} = 27, a \in \mathbb{N}$$

   a. ¿Cuál es el valor de $a - 2$? Justifica.
   b. ¿Cuál es el valor de 3^a?
   c. ¿Cuál es el valor de 3^{a+2}?

Cuaderno de Actividades
Páginas 28 y 29.

Reflexiona y responde

- ¿Qué crees que es lo más difícil al resolver divisiones de potencias? ¿Por qué?.
- ¿Qué pasos sigues para resolver divisiones de potencias? Coméntalos con un compañero.

Raíz cuadrada

El cubo de Astor Place es una escultura de Bernard Rosenthal situada en Astor Place en la isla de Manhattan en Nueva York.

La obra fue construida con 820 kg de acero y se puede girar sobre su eje vertical.

- El cubo de Astor Place tiene un área aproximada de 57 600 cm^2 en cada cara. ¿Cómo calcularías la medida de la arista del cubo?

Ejemplo 1

En un patio de forma rectangular se instalan pastelones cuadrados de lado 1 m. Si en el patio caben 9 pastelones a lo largo y 4 a lo ancho, ¿cuántos pastelones se deben poner a lo largo y a lo ancho de un patio de igual superficie, pero de forma cuadrada?

1. Calculamos el área A del patio de forma rectangular: $A = (9 \cdot 4)\ m^2 = 36\ m^2$.
2. Calculamos la medida del lado del patio de forma cuadrada: $\sqrt{36}$ m = 6 m. Luego, se deben poner 6 pastelones a lo largo y a lo ancho del patio.

Aprende

La **raíz cuadrada** ($\sqrt{\ }$) de un número natural b corresponde a un único número positivo a que cumple: $a^2 = b$ y se representa como $\sqrt{b} = a$.

Ejemplo 2

Estima la raíz cuadrada de 18 y ubícala en la recta numérica.

1. El número 18 no es un cuadrado perfecto, ya que no existe un número $a \in \mathbb{N}$ que cumpla $a^2 = 18$. Por lo tanto, buscamos dos números cuadrados perfectos cercanos a 18.

   $a = 2$, entonces $a^2 = 2^2 = 4$

   $a = 3$, entonces $a^2 = 3^2 = 9$

   $a = 4$, entonces $a^2 = 4^2 = 16$

   $a = 5$, entonces $a^2 = 5^2 = 25$

   Luego, los números buscados son 16 y 25.

2. Calculamos la raíz cuadrada de cada número.

$$\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$$

$$4 < \sqrt{18} < 5$$

3. Como 18 es más próximo a 16 que a 25, entonces $\sqrt{18}$ es más próximo a 4.

- El valor de una potencia de la forma a^2, con a un número natural, se conoce como cuadrado perfecto. Por ejemplo, 64 es un **cuadrado perfecto**, ya que $8^2 = 64$.
- Para obtener el valor de la raíz cuadrada de un número utilizando una **calculadora** básica, debes digitar el número y luego presionar la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Ejemplo 3

Si el área de un cuadrado es 29 cm², ¿cuál es, aproximadamente, su perímetro?

1. El lado del cuadrado mide $\sqrt{29}$ cm. Podemos determinar entre qué números naturales está el valor de la raíz.

$$25 < 29 < 36 \Leftrightarrow \sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36} \Leftrightarrow 5 < \sqrt{29} < 6$$

2. Luego, como 29 es más próximo a 25 que a 36 en la recta numérica, podemos afirmar que $\sqrt{29}$ es más cercano a 5. Ahora escogemos un número decimal cercano a 5, por ejemplo 5,3, obtenemos que $5{,}3^2 = 28{,}09$. Si elegimos el 5,4, obtenemos que $5{,}4^2 = 29{,}16$. Por lo tanto, $\sqrt{29}$ se aproxima a 5,4; es decir, $\sqrt{29} \approx 5{,}4$.

3. El perímetro P del cuadrado se puede aproximar de la siguiente forma: $P \approx (4 \cdot 5{,}4)$ cm $= 21{,}6$ cm.

Aprende

Para **estimar la raíz cuadrada de un número natural** d ($\sqrt{d}$), se pueden elegir dos números $x, y \in \mathbb{N}$ tal que $x < d < y$.

Estos números deben cumplir con la condición de tener raíz cuadrada natural, es decir, $\sqrt{x} = c$ y $\sqrt{y} = e$, con $c, e \in \mathbb{N}$. En general, se consideran c y e dos números consecutivos.

$$x < d < y \qquad \sqrt{x} < \sqrt{d} < \sqrt{y} \qquad c < \sqrt{d} < e$$

Actividades

1. Calcula las siguientes raíces cuadradas.

a. $\sqrt{1}$
b. $\sqrt{9}$
c. $\sqrt{16}$
d. $\sqrt{25}$
e. $\sqrt{64}$
f. $\sqrt{81}$
g. $\sqrt{121}$
h. $\sqrt{144}$
i. $\sqrt{225}$
j. $\sqrt{361}$
k. $\sqrt{400}$
l. $\sqrt{529}$

2. Identifica el número que debe ir en el recuadro para que la igualdad sea verdadera.

a. $\sqrt{\boxed{?}} = 5$
b. $\sqrt{\boxed{?}} = 4$
c. $\sqrt{\boxed{?}} = 10$
d. $\sqrt{\boxed{?}} = 6$
e. $\sqrt{\boxed{?}} = 1$
f. $\sqrt{\boxed{?}} = 40$
g. $\sqrt{\boxed{?}} = 100$
h. $\sqrt{\boxed{?}} = 3$
i. $\sqrt{\boxed{?}} = 9$
j. $\sqrt{\boxed{?}} = 50$
k. $\sqrt{\boxed{?}} = 16$
l. $\sqrt{\boxed{?}} = 25$

3. Analiza las siguientes raíces cuadradas. Luego, estima entre qué números naturales consecutivos se encuentran y ubícalas en la recta numérica.

a. $\sqrt{12}$
b. $\sqrt{15}$
c. $\sqrt{20}$
d. $\sqrt{34}$
e. $\sqrt{43}$
f. $\sqrt{55}$
g. $\sqrt{66}$
h. $\sqrt{101}$
i. $\sqrt{115}$
j. $\sqrt{136}$
k. $\sqrt{150}$
l. $\sqrt{200}$

4. Determina las raíces cuadradas que deben ir en los recuadros para que la suma de las diagonales, verticales y horizontales sea la misma en cada cuadrado mágico.

a.

$\sqrt{49}$	?	$\sqrt{25}$
?	$\sqrt{64}$	?
$\sqrt{121}$	?	$\sqrt{81}$

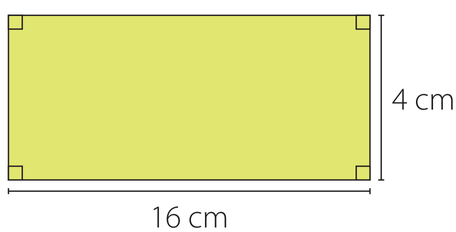
b.

$\sqrt{16}$	?	?
?	$\sqrt{49}$	?
?	$\sqrt{9}$	$\sqrt{100}$

c.

$\sqrt{225}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{289}$
?	?	?
?	$\sqrt{324}$	?

5. ¿Existe un cuadrado que tenga igual área que el rectángulo de la figura? De ser así, ¿cuál sería el perímetro de este cuadrado?



6. **Resuelve los siguientes problemas.**

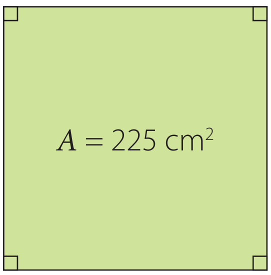
a. El padre de Marisol le prometió una cantidad de dinero igual a 1 000 veces la suma de las raíces cuadradas de los días del mes de enero que son cuadrados perfectos. ¿Cuánto dinero recibirá Marisol?

b. Miguel compró 6 azulejos cuadrados cuya área es de 49 cm^2 cada uno y los ubicó en dos columnas de tres azulejos en la pared. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo formado por estos azulejos en dicha disposición?

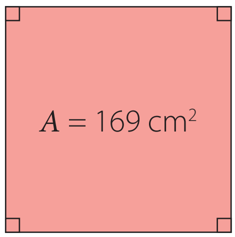
c. Un parque está emplazado en un terreno de forma cuadrada, y su área es de 10 000 m^2. Si Daniela da 4 vueltas alrededor del parque, ¿cuántos metros recorre?

7. **Analiza cada cuadrado y calcula su perímetro (P) sabiendo el valor del área (A) en cada caso.**

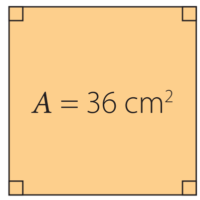
a.



b.

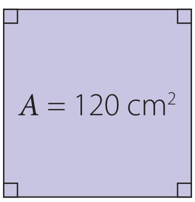


c.

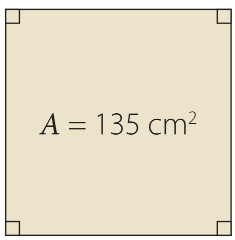


8. **Estima el perímetro (P) de los siguientes cuadrados. Utiliza una calculadora para verificar tu aproximación.**

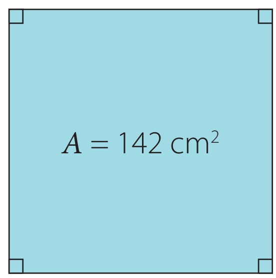
a.



b.



c.



9. **La energía cinética de un móvil, medida en joule (J), se puede calcular con la expresión $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, en la que m representa la masa del móvil en kg y v su rapidez en m/s. Si la energía cinética es de 225 000 J y la masa del móvil es de 500 kg, ¿cuál es su rapidez?**

Cuaderno de Actividades
Páginas 30 y 31.

Reflexiona y responde

- Explica cómo estimar el valor de una raíz cuadrada.
- ¿Qué hiciste para corregir tus errores y aclararar tus dudas?

Variaciones porcentuales

¿Cuáles redes sociales y aplicaciones reconoces en la imagen?

Identifica las principales redes usadas actualmente, los beneficios de su uso y precauciones que se deben tener al momento de ocuparlas. Guíate por el ejemplo.

Red social

Principales usos	Precauciones
• Interacción entre usuarios. • Compartimiento de recursos (imágenes, videos y GIF, entre otros). • Creación de páginas para empresas o causas específicas.	• Publicaciones de contenido personal. • Compartir información errónea o polémica. • Acceder a enlaces o páginas externas de publicidad.

- En parejas, realicen una encuesta sobre los hábitos de uso de internet de los estudiantes de su colegio o de su curso. Para ello, pueden plantear preguntas como las siguientes:

  1. ¿Cuáles son las redes sociales de tu interés?

  2. ¿Utilizas internet diariamente?

  3. ¿Utilizas redes sociales?

  4. ¿Crees que es importante considerar las precauciones establecidas en el uso de redes sociales?

- Recopilen la información y calculen los porcentajes asociados a cada respuesta.

  Por ejemplo, si de un total de 50 personas encuestadas, 35 de ellas utilizan internet, podemos decir que el 70 % de las personas encuestadas usan diariamente internet.

- Analicen toda la información y presenten las conclusiones a su curso. Comenten acerca de los datos recopilados y de la influencia de las redes sociales actualmente.

Ejemplo 1

Un producto que tenía un precio de $25 000 se está liquidando con un descuento del 40 %. Si en dos meses más el valor del producto aumentará en un 25 %, ¿cuál será el precio final?

1. Un descuento del 40 % equivale a cancelar el 60 % del precio del producto. Es decir:

$$60\,\% \cdot \$25\,000 = \frac{60}{100} \cdot \$\,25\,000 = 0{,}6 \cdot \$25\,000 = \$15\,000$$

2. Un aumento del 25 % equivale a pagar 125 % del valor del producto. Es decir:

$$125\,\% \cdot \$15\,000 = \frac{125}{100} \cdot \$15\,000 = 1{,}25 \cdot \$15\,000 = \$18\,750$$

3. El precio final del producto será de $18 750.

Aprende

- El a % de **descuento** en el valor de un producto equivale a cancelar el $(100 - a)$ % del precio del producto.
- Un **aumento** del b % en el valor de un producto equivale a cancelar el $(100 + b)$ % del precio del producto.

Ejemplo 2

¿Cuál es el interés simple producido por un capital de $400 000 al 5 % anual durante 2 años?

1. Para determinar el interés que se genera el primer año calculamos el 5 % de $400 000.

$	%
400 000	100
x	5

$$x = \frac{400\,000 \cdot 5}{100}$$

$$x = \$20\,000$$

2. Como el período es de 2 años, multiplicamos el interés generado el primer año por 2, es decir, $20 000 • 2 = $40 000.

3. Podemos comprobar lo obtenido utilizando la expresión:

$$\begin{aligned} I &= 400\,000 \cdot 5\,\% \cdot 2 \\ &= 400\,000 \cdot \frac{5}{100} \cdot 2 \\ &= \$40\,000 \end{aligned}$$

Luego, el interés producido durante 2 años es de $40 000.

Ejemplo 3

Calcula la variación del IPC pedida.

El IPC entre dos meses es del 4,2 %. Si una familia destina $350 000 mensuales para ciertos bienes y servicios, ¿cuánto más se puede estimar que gastará si siguen consumiendo lo mismo?

1. Debido a que el costo de los bienes y servicios aumenta en un 4,2 %, debemos calcular el 4,2 % de $350 000.

2.

Costo ($)	Porcentaje (%)
350 000	100
x	4,2

$$x = \frac{350\,000 \cdot 4{,}2}{100}$$

$$x = \$14\,700$$

3. Se puede estimar que gastará $14 700 más mensualmente.

- El índice de precios al consumidor (IPC) es un indicador económico que mide mes a mes la variación en los precios de una canasta familiar conformada por ciertos bienes y servicios.

Ejemplo 4

Completa la siguiente liquidación de sueldo con las cantidades que faltan.

Liquidación de sueldo	
Sueldo bruto	
Descuentos	
AFP (13 %)	
Salud (7 %)	$42 000
Total descuentos	
Sueldo líquido	

- **Sueldo bruto:** es la cantidad de dinero sin los descuentos de aportes del trabajador ni las retenciones que debe hacer el empleador.
- **Sueldo líquido:** es la suma de dinero que efectivamente se recibe luego de haberse realizado todos los descuentos aplicables.

1. Calculamos el sueldo bruto.

$	%
x	100
42 000	7

$$x = \frac{42\,000 \cdot 100}{7}$$

$$x = \$600\,000$$

2. Calculamos el 13 % de $600 000, que representa el descuento por concepto de AFP, es decir, 13 % • $600 000 = 0,13 • $600 000 = $78 000.

3. Luego, el total de los descuentos es ($42 000 + $78 000) = $120 000.

4. Finalmente, el sueldo líquido es ($600 000 – $120 000) = $480 000.

Liquidación de sueldo	
Sueldo bruto	$600 000
Descuentos	
AFP (13 %)	$78 000
Salud (7 %)	$42 000
Total descuentos	$120 000
Sueldo líquido	$480 000

Ejemplo 5

Un automóvil se encuentra a la venta con el siguiente aviso:

¿Cuánto es el IVA que se paga por el automóvil?

1. El IVA equivale al 19 % del valor inicial fijado para un producto. Por lo tanto, el precio del automóvil equivale al 119 % de su valor inicial.

2. Calculamos el IVA que se paga por el automóvil.

Precio ($)	Porcentaje (%)
7 500 000	119
x	19

$$x = \frac{7\,500\,000 \cdot 19}{119}$$

$$x \approx \$1\,197\,479$$

3. El IVA que se paga por el automóvil es, aproximadamente, $1 197 479.

Aprende

Los **porcentajes** tienen diversos usos. Por ejemplo:

- Para calcular el **impuesto al valor agregado** (IVA), que corresponde al 19 % de un cierto producto o servicio, o el **índice de precios al consumidor** (IPC), que mide la variación de los precios de una canasta de bienes y servicios que se consume en un hogar.
- Para calcular **intereses o descuentos** que se aplican a ciertos productos o deudas. Por ejemplo, el interés simple I que genera un capital C a una tasa de interés anual i% en un período t se puede calcular utilizando la expresión: $I = C \cdot i\,\% \cdot t$.
- Para calcular el porcentaje de **ganancia o pérdida** de ciertos productos, entre muchas otras aplicaciones.

En una tienda se ofrece un descuento del 20 % sobre el precio de cada producto. Calcula el monto que se debe pagar si el precio de cada producto es:

$5 990 $12 990 $19 990 $24 990

Actividades

1. **Reúnete con un compañero o compañera y resuelvan el siguiente problema.**

Si antes venían 450 mL de producto, ¿es correcta la información que aparece en el envase del cartel? ¿Por qué?

2. **Resuelve los siguientes problemas relacionados con el IPC:**

   a. Debido a una sequía, las verduras experimentaron un alza en sus precios, con lo que el IPC sufrió una variación del 2 % entre febrero y marzo. Si una familia gastó $60 000 en verduras durante febrero, ¿en cuánto aumentará su gasto en marzo si se mantiene su consumo de verduras?

   b. En una empresa reajustan anualmente el sueldo de sus trabajadores de acuerdo con la variación del IPC. Si el IPC fue de 5,2 %, ¿cuál será el nuevo sueldo de un trabajador que ganaba $550 000?

3. **Resuelve los siguientes problemas.**

   a. Un agricultor decidió invertir las ganancias de su cosecha en una cuenta con una tasa de interés simple anual del 2 %. Si invierte $8 500 000 y recibe $680 000 de intereses, ¿cuánto tiempo el agricultor mantuvo su dinero en la cuenta?

   b. Una pizzería está de aniversario y ofrece todas las pizzas con un 30 % de descuento. Si la pizza familiar tiene un precio de $11 350 y la mediana cuesta $8 490, sin descuento, ¿cuánto dinero pagará una persona que compre una pizza familiar y dos medianas?

   c. Una persona tiene un sueldo líquido de $300 000. Si el sueldo bruto se lo aumentan en un 5 %, ¿cuál será su nuevo sueldo líquido?

   d. En enero el precio de un producto aumenta un 10 %; en febrero, un 20 % sobre el nuevo precio, y en marzo se incrementa otro 20 % sobre el precio del mes anterior. Si el precio del producto en diciembre era de $54 000, ¿en qué porcentaje aumentó en marzo con respecto a diciembre?

4. José observa las ofertas que promocionan dos supermercados.

   a. ¿En qué supermercado conviene más comprar 6 paquetes de fideos? Justifica.

   b. ¿Cuál es aproximadamente el porcentaje de descuento al comprar 6 paquetes de fideos en cada supermercado?

5. Felipe realizó las siguientes inversiones. Primero, abrió una cuenta bancaria con la mitad del capital. Luego, gastó 25 % de lo que le quedaba en un viaje de vacaciones. Por último, invirtió $3 600 000 en una empresa de tecnología. Si al final se quedó con $2 400 000, responde:

   a. ¿Cuánto dinero tenía Felipe antes de invertir en la empresa?

   b. ¿Cuánto dinero tenía Felipe antes de salir de vacaciones?

6. Una entidad financiera realiza préstamos a sus afiliados con diferentes tasas de interés simple anual de acuerdo con el tiempo de duración del crédito. Además, invierte en fondos a plazo fijo, cuyo rendimiento depende del tiempo establecido. Sus préstamos e inversiones son los siguientes:

Préstamos		
Tiempo	**Capital**	**Interés anual**
3 años	$3 500 000	10 %
	$1 200 000	
	$4 000 000	
	$2 300 000	
5 años	$12 000 000	10,6 %
	$9 000 000	
	$21 000 000	

Inversiones		
Tiempo	**Capital**	**Interés anual**
3 meses	$2 500 000	8,63 %
	$5 000 000	
	$3 600 000	
	$7 500 000	
6 meses	$4 500 000	9,16 %
	$2 900 000	
	$10 000 000	
12 meses	$6 000 000	9,58 %
	$60 000 000	

   a. ¿Qué sistema genera más intereses para la entidad en un mes?

   b. ¿Cuánto dinero ingresa a la entidad al mes por concepto de intereses, aproximadamente?

   c. Reúnete con un compañero o compañera, elijan uno de los préstamos a los cuales se puede acceder y calculen el valor de la cuota mensual que se debe pagar a la entidad. Comparen el costo total de los préstamos seleccionados.

Cuaderno de Actividades
Páginas 32 y 33.

Reflexiona y responde

- ¿Crees que conocer porcentajes te ayudará en tu vida cotidiana? ¿Por qué?
- ¿Qué sabes ahora sobre porcentajes que no sabías antes? Explica.

Evaluación Lección 3

1. Calcula el valor de cada potencia.
   a. 2^3
   b. 5^3
   c. 9^2
   d. 14^0
   e. 3^3
   f. 15^2

2. Desarrolla las potencias y calcula el resultado de cada operación.
   a. $2^2 - 1^2$
   b. $4^2 - 3^2$
   c. $5^2 + 3^3$
   d. $7^2 - 2^3$
   e. $3^3 \cdot 3^3$
   f. $4^2 : 2^2$

3. Representa como una potencia las siguientes multiplicaciones y calcula su valor.
   a. $4 \cdot 4 \cdot 4$
   b. $25 \cdot 25$
   c. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
   d. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones. Utiliza las propiedades de las potencias.
   a. $5^2 \cdot 5^3$
   b. $3^3 \cdot 2^3 \cdot 1^3$
   c. $4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3$
   d. $3^3 : 3^2$
   e. $25^2 : 1^2 : 5^2$
   f. $100^3 : 100^2$
   g. $(10^3)^3$
   h. $(12^2 : 6^2)^3$

5. La bacteria *Escherichia coli*, que forma parte de la flora intestinal, se reproduce por fisión binaria. Es decir, cada bacteria se divide en otras dos idénticas bajo ciertas condiciones y en un tiempo determinado. Si en condiciones óptimas esta bacteria se reproduce una vez cada 20 min, ¿cuántas bacterias, a partir de una, se habrán generado en 2 h?

6. Carla trajo de su viaje 3 paquetes con 9 cajas cada uno. Cada una de las cajas tiene 27 bolsas, y cada bolsa tiene 9 lápices. ¿Cómo se expresa con una potencia la cantidad de lápices que trajo Carla?

7. Los tornillos vienen en bolsas de 100. Cada 10 bolsas se empaqueta una caja. Las cajas se embalan de a 10 en cajones y los cajones se guardan de a 10 en un contenedor para ser transportados. ¿Cuántos tornillos lleva un contenedor?

8. Ubica las siguientes raíces cuadradas en la recta numérica. Si es necesario, utiliza la calculadora para estimar sus valores.
   a. $\sqrt{98}$
   b. $\sqrt{124}$
   c. $\sqrt{188}$
   d. $\sqrt{135}$

9. **Estima la medida del lado de un cuadrado cuya área es 227 cm². Comprueba tu resultado utilizando calculadora.**

10. **Encuentra el valor que hace falta para que la igualdad se cumpla.**

a. $2^{\boxed{?}} \cdot 2^5 = 2^9$

b. $\sqrt{\boxed{?}} = 49$

c. $7^8 : 7^{\boxed{?}} = 7^3$

d. $\sqrt{\boxed{?}} = 121$

11. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. ¿Cuál es el porcentaje de ganancia de un comerciante que vende a $4 600 un producto que compró a $4 000?

b. Un *notebook* tiene un descuento de un 20 %. Si se pagan $281 600 con el descuento incluido, ¿cuál es el precio sin el descuento?

c. Camila y Luciana compraron el mismo teléfono móvil, pero en diferentes lugares. El de Camila tenía un valor de $120 000, pero le hicieron un descuento del 30 %; mientras que el de Luciana tenía un valor de $150 000 sobre el cual le aplicaron un descuento del 40 %. ¿Quién pagó menos?

12. **Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.**

a. Si realizo una compra con un 12 % de descuento, pago el 88 % del precio total.

b. Al comer las tres cuartas partes del total de una pizza, solo queda el 20 % de la pizza.

c. Si gasto el 10 % de mis ahorros, me queda la décima parte de lo que había ahorrado.

13. **Comprueba los datos que exponen en una tienda según los descuentos aplicados a los productos.**

Descuentos por cambio de temporada			
Prenda	Precio original	Descuento	Precio final
Polera	$8 000	15 %	$6 800
Pantalón	$16 000	20 %	$14 400
Chaqueta	$26 000	25 %	$21 000

a. ¿Cuál es el porcentaje del precio original que se debe pagar por cada prenda?

b. ¿Son correctos los precios finales de la tabla? ¿Por qué?

Cuaderno de Actividades
Páginas 34 y 35.

Reflexiona y responde

- ¿Cómo relacionas las fracciones con los porcentajes? Explica.
- ¿Qué aprendizajes sobre potencias, raíz cuadrada o porcentajes crees que necesitas ejercitar más? ¿Por qué?

Evaluación final

1. En los siguientes cuadrados mágicos, el producto de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es el mismo. ¿Cuáles son los números que faltan?

a.

?	?	2	–5
?	1	?	–10
?	4	–25	–1
?	?	2	4

b.

4	?	?	4
28	–2	?	?
?	?	–4	4
?	8	2	14

2. Si $a = -1$, $b = -2$, $c = 4$ y $d = 6$, determina el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones.

   a. $a \cdot c - d : b$

   b. $c : b + a - d$

   c. $a \cdot (b - c)$

   d. $b \cdot c \cdot d$

   e. $c : d \cdot a$

   f. $(d \cdot d) - (b \cdot b)$

   g. $-(-a) + c \cdot d$

   h. $(a - d) \cdot (b + c)$

   i. $(2a - 4b + 6c) : (-d)$

3. Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

   a. $1 - \left\{\frac{6}{7} + \left(0{,}1 - \frac{3}{2} : 4\right) - 3\right\}$

   b. $4{,}5 - \frac{23}{10} : (0{,}9 - 2) + 1{,}\overline{7}$

   c. $3\frac{1}{5} + \left(2 - \frac{7}{3}\right) - 0{,}9 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}25$

   d. $2{,}\overline{7} + \left\{1 - \frac{3}{5} : \left(0{,}1 + \frac{5}{2}\right)\right\}$

4. Verifica si la resolución del siguiente ejercicio es correcta. Si no lo es, identifica el error y corrígelo.

$$1\frac{1}{5} - 0{,}5 \cdot \frac{10}{3} = \frac{6}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{7}{3}$$

5. Vicente afirma que $-19 = 4 \cdot (-4) + (-3)$. ¿Está Vicente en lo correcto? ¿Por qué?

6. Resuelve los siguientes problemas.

   a. En 1960, el francés Jacques Piccard y el estadounidense Don Walsh alcanzaron una profundidad de 10 916 m en una misión oceánica. Si un buzo se sumerge a una profundidad de 4 m, ¿en cuántas veces la profundidad de la misión oceánica supera a la alcanzada por el buzo?

   b. Agustina confecciona servilletas cuadradas para el cumpleaños de su nieta y las quiere decorar agregando una cinta en el borde de ellas. Si cada servilleta tiene un área de 200 cm^2, ¿cuántos metros de cinta tiene que comprar para decorar los bordes de 12 servilletas?

c. En una colecta de alimentos, lo reunido se clasifica y se ubica en diferentes cajas. En la selección de aceites se tienen envases de 2,5 L, $\frac{3}{4}$ L, 1 L y $\frac{3}{2}$ L, uno de cada uno. ¿Cuántos litros de aceite se han juntado en total?

d. Se quiere repartir $\frac{19}{2}$ kg de harina en sacos de 0,3 kg. ¿Cuántos sacos se alcanzan a llenar?

7. **Calcula la información faltante en las siguientes liquidaciones de sueldo.**

a.

Liquidación de sueldo	
Sueldo bruto	\$720 000
Descuentos	
AFP (13 %)	?
Salud (7 %)	?
Total descuentos	?
Sueldo líquido	?

b.

Liquidación de sueldo	
Sueldo bruto	?
Descuentos	
AFP (13 %)	\$74 100
Salud (7 %)	?
Total descuentos	?
Sueldo líquido	?

c.

Liquidación de sueldo	
Sueldo bruto	?
Descuentos	
AFP (13 %)	?
Salud (7 %)	?
Total descuentos	\$155 000
Sueldo líquido	?

8. **Verifica si cada afirmación es verdadera o falsa.**

a. Multiplicar una potencia por sí misma es equivalente a elevar a 2 el valor de la potencia.

b. Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $(a^2 \cdot b^2)^3 = (a \cdot b)^7$.

c. Al multiplicar una potencia por sí misma, se puede utilizar la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base o de igual exponente.

d. Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

e. Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $a^a \cdot a^a = a^a$.

9. **¿Cuál es el valor de x en la igualdad $2^{2x} \cdot 2^2 = 64$?**

10. **Romina pagó \$40 640 por un artículo que compró en cuotas. El precio del producto al contado es de \$32 000. Romina afirma que pagó un 127 % de recargo. ¿Está en lo correcto? ¿Por qué?**

11. **La medida del lado de un cuadrado es 5 cm. Si esta se incrementa en un 30 %, ¿en qué porcentaje aumenta su perímetro? ¿Y su área?**

Cuaderno de Actividades
Páginas 36 y 37.

Reflexiona y responde

- ¿Cómo relacionas los contenidos que viste en el curso anterior con lo que sabes ahora?
- ¿En qué situaciones de la vida cotidiana puedes utilizar los números enteros, fracciones, potencias o porcentajes?

Síntesis y Repaso

Lección 1 Números enteros

Regla de los signos para la multiplicación y división de números enteros:

Multiplicación	División
$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) : (+) = (+)$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) : (-) = (+)$
$(+) \cdot (-) = (-)$	$(+) : (-) = (-)$
$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-) : (+) = (-)$

Ejemplos: $(-18) \cdot (-5) = 90$

$(-500) : (-25) = 20$

$30 \cdot (-25) = -750$

$(-63) : 7 = -9$

1. Resuelve las siguientes operaciones.
   - a. $(-7) \cdot 9$
   - b. $(-5) \cdot (-12)$
   - c. $32 \cdot (-8)$
   - d. $(-14) \cdot (-10)$
   - e. $(-48) : (-8)$
   - f. $320 : (-8)$
   - g. $24 : (-6) : (-1)$
   - h. $7 \cdot (-6) + (-8) : 4$

2. En la tabla se muestran las temperaturas mínimas registradas en cierta ciudad durante una semana. ¿Cuál fue el promedio de las temperaturas mínimas esa semana?

Temperaturas mínimas en una ciudad							
Día	Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
°C	5	4	–1	0	2	–2	–1

Lección 2 Números racionales

Los números racionales se pueden representar como fracción o número decimal.

Ejemplos: $\frac{12}{5} = 12 : 5 = 2{,}4 \qquad 0{,}7 = \frac{7}{10}$

Para resolver una adición o sustracción de números racionales, se utilizan las mismas propiedades que en los números enteros para determinar el signo del resultado.

Ejemplo: $\left(-\frac{1}{3}\right) + 0{,}8 = \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{5} = \frac{7}{15}$

Al resolver multiplicaciones y divisiones de números racionales puedes aplicar la regla de los signos utilizada en los números enteros.

Ejemplos:

$\frac{1}{6} : \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3{,}2 = \left(-\frac{3}{6}\right) \cdot 3{,}2 = -1{,}6$

1. Representa los siguientes números como fracción o número decimal según corresponda.
   - a. $\frac{4}{9}$
   - b. $0{,}18$
   - c. $-\frac{4}{9}$
   - d. $5{,}\overline{4}$

2. Resuelve las siguientes operaciones.
   - a. $1\frac{1}{2} + 0{,}75$
   - b. $(-1{,}2) \cdot \frac{1}{4}$
   - c. $3{,}25 : (-0{,}5)$
   - d. $0{,}\overline{2} - \left(-\frac{1}{5}\right)$

3. El lunes, Juan tejió $\frac{2}{3}$ del total de una bufanda; el martes, $\frac{1}{4}$ del total; el miércoles notó un error y deshizo $\frac{1}{3}$ de lo que había hecho. ¿Qué fracción del total le falta por tejer?

Lección 3 Potencias, raíz cuadrada y porcentajes

	Multiplicación de potencias	División de potencias
de igual base	*se conserva la base y se suman los exponentes*	*se conserva la base y se restan los exponentes*
de igual exponente	*se multiplican las bases y se conserva el exponente*	*se dividen las bases y se conserva el exponente*

Ejemplos: $4^2 \bullet 4 = 4^{2+1} = 4^3 = 64$ $\quad 6^3 : 3^3 = (6 : 3)^3 = 2^3 = 8$

La raíz cuadrada de un número natural b corresponde a un único número positivo a que cumple $a^2 = b$, es decir, $\sqrt{b} = a$.

Ejemplo: $\sqrt{81} = 9$, *ya que* $9^2 = 81$.

Los porcentajes tienen diversos usos, por ejemplo, sirven para calcular el IVA, el IPC, intereses o descuentos que se aplican a ciertos productos o deudas, el interés simple que genera un capital con una cierta tasa de interés durante un período, entre muchas otras aplicaciones.

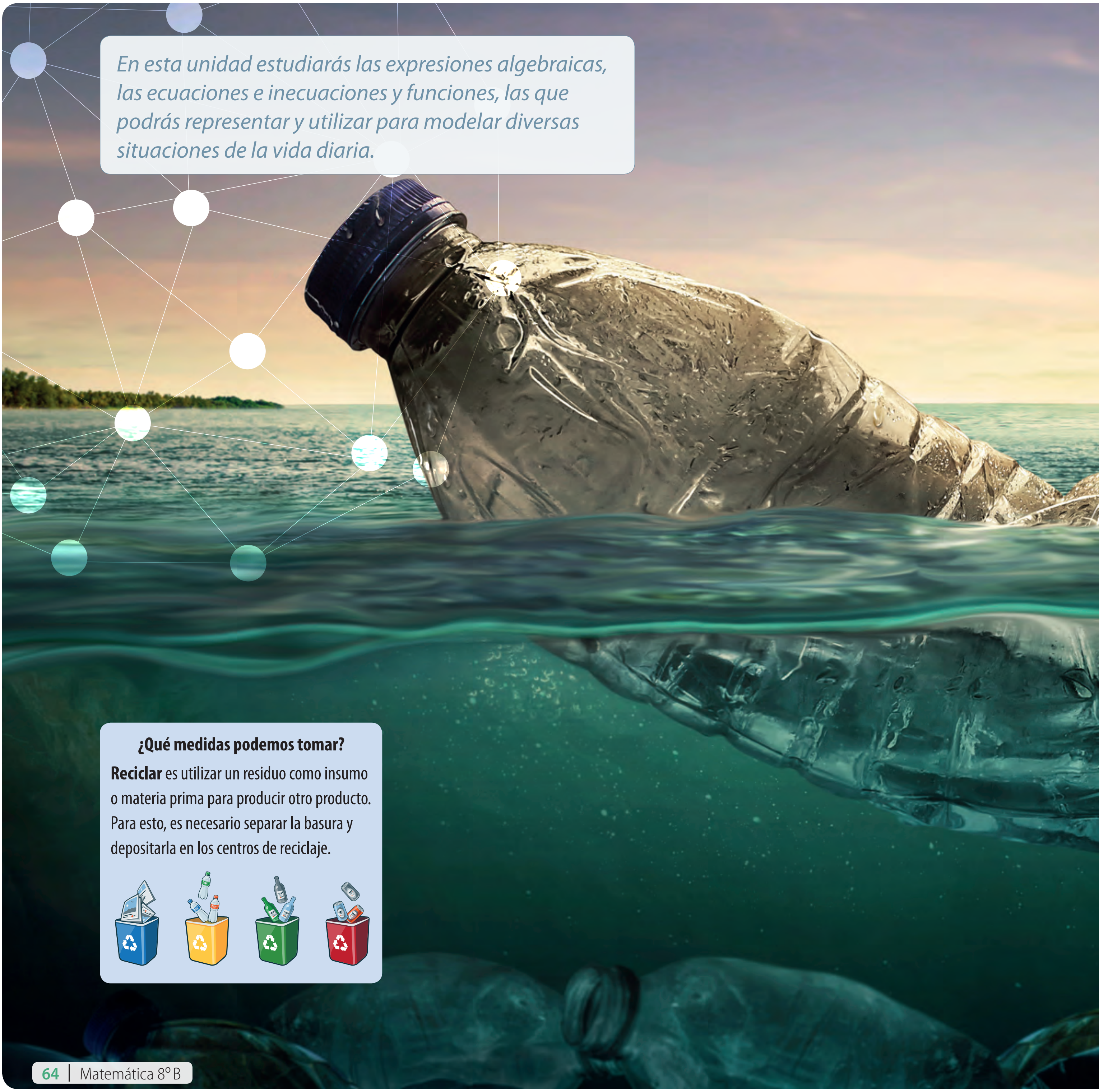
1. Calcula el valor de las siguientes expresiones. Utiliza las propiedades de las potencias.
   - **a.** $5^2 \bullet 5^3$
   - **b.** $3^3 \bullet 2^3 \bullet 1^3$
   - **c.** $4^3 \bullet 4^3 \bullet 4^3$
   - **d.** $3^3 : 3^2$
   - **e.** $25^2 : 1^2 : 5^2$
   - **f.** $100^3 : 100^2$
   - **g.** $(10^3)^3$
   - **h.** $(12^2 : 6^2)^3$
2. Calcula las siguientes raíces cuadradas.
   - **a.** $\sqrt{9}$
   - **b.** $\sqrt{121}$
   - **c.** $\sqrt{64}$
   - **d.** $\sqrt{10\,000}$
   - **e.** $\sqrt{256}$
3. Estima la medida del lado de un cuadrado cuya área es 198 cm². Comprueba tu resultado utilizando calculadora.
4. En una empresa las ventas de este año aumentaron en un 30 % con respecto a las del año anterior, las cuales fueron de $ 134 000 000. ¿Cuánto se vendió este año?
5. Macarena pagó $ 95 000 por una bicicleta más el 4,5 % por gastos de envío. ¿Cuánto pagó en total?
6. El precio de un artículo electrónico disminuyó de $ 28 900 a $23 120. ¿En qué porcentaje varió su precio?

2
Unidad

Medioambiente

¿Cómo podemos aplicar el álgebra en el cuidado del medioambiente?

En esta unidad estudiarás las expresiones algebraicas, las ecuaciones e inecuaciones y funciones, las que podrás representar y utilizar para modelar diversas situaciones de la vida diaria.



¿Qué medidas podemos tomar?

Reciclar es utilizar un residuo como insumo o materia prima para producir otro producto. Para esto, es necesario separar la basura y depositarla en los centros de reciclaje.

En los distintos estudios medioambientales se suelen usar **modelos matemáticos** para crear proyecciones. Al tener esta información, las organizaciones pueden tomar medidas para aminorar los daños producidos y fomentar acciones que protejan al medioambiente.

- ¿Qué opinas acerca del reciclaje? ¿Cómo lo puedes poner en práctica en tu colegio y en tu hogar?
- ¿Cuánta basura crees que produce una persona al año? Averigua y comenta con tu curso.

Evaluación diagnóstica

1. Calcula.

a. $8 : -2 + 5$

b. $-6 \cdot 1{,}5 + 5$

c. $4 \cdot (-5 + 50)$

d. $-2 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right)$

2. Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

a. $3m + 2n - m + 5n$

b. $2x^2 + 4x + 5x^2 - x$

c. $5ab^2 + 3ab - 3ab^2 - 5ab$

d. $5m^2 + 3mn - 4m + 7m^2 - 8mn$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones.

a. $5x = 25$

b. $3x = -6$

c. $-7x = -56$

d. $6x > 12$

e. $2x > 14$

f. $3x < -27$

4. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes expresiones.

a. El doble de un número.

b. El triple de un número, aumentado en 8.

c. La diferencia entre dos números.

d. La mitad de un número, disminuido en 6.

Lección 1 Expresiones algebraicas

Adición y sustracción de expresiones algebraicas

En esta lección podrás resolver operaciones de expresiones algebraicas y relacionarlas con conceptos geométricos.

En una campaña de reciclaje realizada en un colegio, se otorga a cada curso 8 puntos por cada envase o contenedor de vidrio recolectado y 5 puntos por cada envase o contenedor de plástico.

Observa la imagen y luego responde:

- Si un curso reunió 60 artículos de plástico y 24 de vidrio, ¿cuánto puntaje obtuvo?
- Si cada artículo de plástico se representa con una p y cada artículo de vidrio con una v, ¿qué expresión permite calcular el total de puntos obtenidos?

- Una **expresión algebraica** es aquella en que se combinan letras, números y operaciones. Por ejemplo:

Coeficiente numérico

$$x^3y - \boxed{4xy^2}$$ Factor literal

Término algebraico

Ejemplo 1

Un curso registró los artículos reunidos en la campaña de reciclaje de la siguiente manera:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
$6p + 3v$	$7p + 6v$	$8p + 5v$	$9p + 3v$	$9p + 2v$

¿Cuántos artículos reunieron en total de cada tipo?

1. Planteamos la suma y asociamos los términos semejantes.

$$\begin{aligned}&(6p + 3v) + (7p + 6v) + (8p + 5v) + (9p + 3v) + (9p + 2v)\\ &= (6p + 7p + 8p + 9p + 9p) + (3v + 6v + 5v + 3v + 2v)\end{aligned}$$

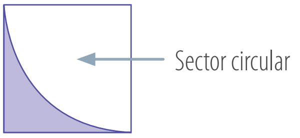
2. Reducimos la expresión algebraica.

$$39p + 19v$$

Entonces, reunieron 39 artículos de plástico y 19 de vidrio.

Ejemplo 2

Determina el área de la parte pintada de la figura si el área del cuadrado está dada por la expresión $(8x^2 + 6y^2)$ cm² y el área del sector circular es $(5x^2 - y^2)$ cm².



1. Para determinar el área (A) de la parte pintada se resta al área del cuadrado el área del sector circular:

$$A = (8x^2 + 6y^2)\text{ cm}^2 - (5x^2 - y^2)\text{ cm}^2$$

2. Resolvemos la expresión.

$$\begin{aligned}A &= [8x^2 + 6y^2 - 5x^2 + y^2]\text{ cm}^2\\ A &= [(8x^2 - 5x^2) + (6y^2 + y^2)]\text{ cm}^2\\ A &= (3x^2 + 7y^2)\text{ cm}^2\end{aligned}$$

El área de la parte pintada es $(3x^2 + 7y^2)$ cm².

- Para reducir una expresión algebraica, puedes eliminar los paréntesis si el signo que les antecede es positivo (+); mientras que si es negativo (–), debes multiplicar por –1 todos los términos asociados. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}&x + (3x - y) - (-x + 5y)\\ &= x + 3x - y + x - 5y\\ &= (x + 3x + x) + (-y - 5y)\\ &= 5x + (-6y)\\ &= 5x - 6y\end{aligned}$$

Aprende

- En una expresión algebraica se llaman **términos semejantes** a aquellos que tienen el mismo factor literal.
- Para **sumar o restar expresiones algebraicas** se asocian los términos semejantes y luego se suman o se restan sus coeficientes numéricos y se conserva el factor literal.

Actividades

1. Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

   a. $3x + 6y + 2x - 4y$

   b. $6m - 17n + 8n + 7m - 2n$

   c. $2x + 6y + 3x^2 + 5x + 5x^2$

   d. $4a - 2ab^3 + 3b + 5a + 8ab^3$

   e. $2ab + 2b - (4ab + 5b)$

   f. $3b + 3xy - (-6b + 8xy)$

2. En cada caso, determina el término que falta para que se cumpla la igualdad.

   a. $6m + 4n + \boxed{?} + 6n = 17m + 10n$

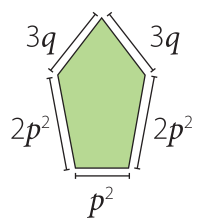
   b. $3ab + 6b + \boxed{?} - 10b = 5ab - 4b$

   c. $3x + 8y + \boxed{?} + 5x + 7x^2 = 8x + 8y + 16x^2$

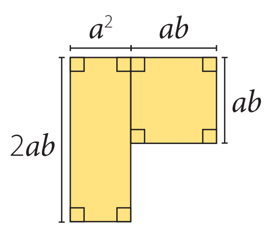
   d. $7a - 8ab^3 + 6b + 5a + 9ab^3 = \boxed{?} + 6b + ab^3$

3. Calcula el perímetro de los siguientes polígonos.

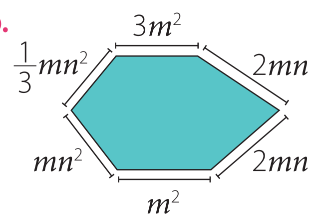
   a.



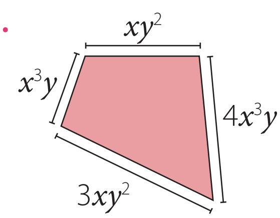
   c.



   b.

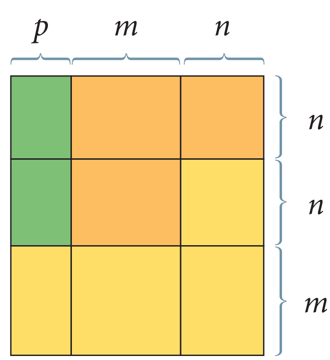


   d.



- Para **calcular el perímetro** de un polígono, se deben sumar las medidas de todos sus lados.

4. Observa la siguiente figura compuesta por rectángulos y cuadrados. Luego, determina una expresión que represente el perímetro de:



   a. La figura verde.

   b. La figura anaranjada.

   c. La figura amarilla.

5. Considera las siguientes igualdades y luego calcula.

   $A = m + n$ $\qquad$ $B = 2m - n$ $\qquad$ $C = 4m - 3n$

   a. $A + B$

   b. $A + B + C$

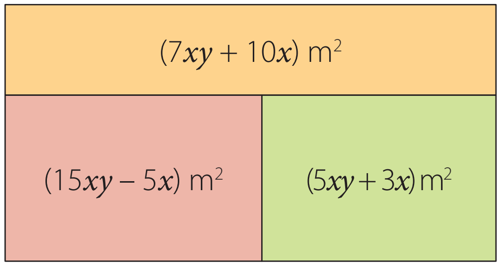
   c. $A - B$

   d. $B - A$

   e. $A - (B + C)$

   f. $B - (A + C)$

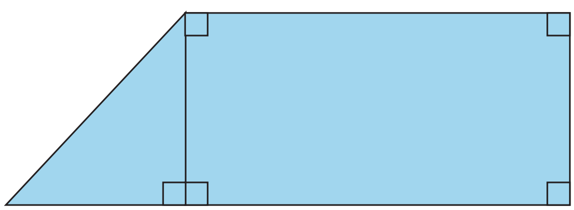
6. Un centro vacacional se divide en sectores de piscina, áreas verdes y hospedaje. En la figura se muestra el área de cada zona. ¿Cuál es el área total del centro vacacional?



7. La vida útil promedio de un teléfono móvil se puede calcular, en años, con la expresión $(x + 2)$, donde x es la calidad: 0 para calidad baja, 1 para calidad media y 2 para calidad alta. Considerando esta información, responde.
   a. ¿Qué tipo de teléfono dura más tiempo?
   b. ¿Cuántos años más dura el teléfono con mayor vida útil con respecto al que dura menos tiempo?

8. La edad de Antonia se expresa como $(n + 15)$ años, donde n es un número natural, y su amigo Carlos tiene 3 años más que ella. Responde las siguientes preguntas utilizando una expresión algebraica.
   a. ¿Cuántos años tiene Carlos?
   b. ¿Qué edad tendrá Antonia en 5 años más?
   c. ¿Cuántos años suman las edades actuales de Carlos y Antonia?

9. Pablo compró un terreno con la forma que se muestra en la figura. El área de la parte rectangular se representa por $(6x^2 + 12x)$ m^2 y el área triangular por $(2x^2 + 1)$ m^2. Si el terreno tiene un área rocosa que se representa por $(x^2 - 5x + 1)$ m^2 en la cual no es posible sembrar, ¿cuál es la expresión que se representa el área en la que se puede sembrar?



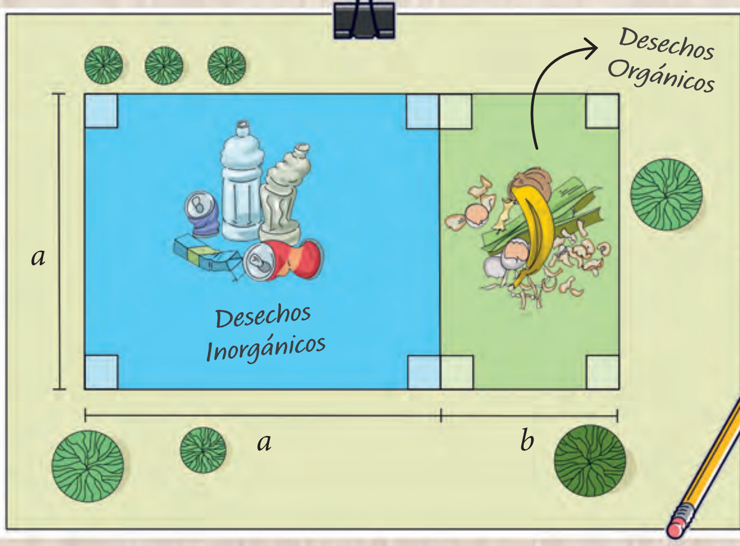
Cuaderno de Actividades
Páginas 38 y 39.

Reflexiona y responde

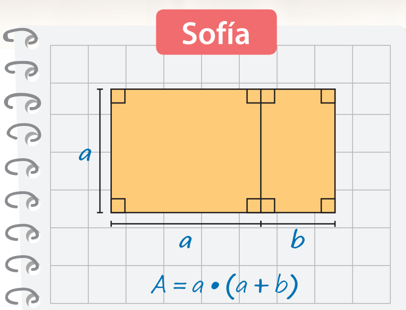
- ¿Qué es lo primero que haces al resolver adiciones y sustracciones de expresiones algebraicas? Explica.
- ¿Qué error crees que es el más frecuente al reunir términos semejantes? Justifica dando ejemplos.
- ¿Qué ejercicio te costó más desarrollar?, ¿cómo lograste resolverlo?

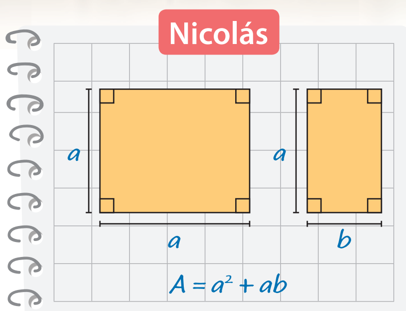
Multiplicación de expresiones algebraicas

En un curso hicieron un plano, como el que se muestra en la imagen, para construir un punto de reciclaje en el colegio. Para ello, distribuyeron un área cuadrada para los desechos inorgánicos y una rectangular para los orgánicos. Aún no tienen certeza de las medidas exactas del sector, por lo que representaron las medidas de los lados como a y b.



Para calcular el área total del punto de reciclaje, dos estudiantes realizaron los siguientes procedimientos:





Explica los procedimientos que siguieron Sofía y Nicolás.

- ¿Son equivalentes las expresiones obtenidas por Sofía y por Nicolás? Justifica.
- Si $a = 3$ m y $b = 2$ m, ¿cuál es el área asignada para los desechos inorgánicos?, ¿y para los orgánicos?
- Si reemplazas los valores asignados para a y b en la expresión a la que llega Sofía y a la que llega Nicolás, ¿cuánto resulta en cada caso?

- Al multiplicar los factores literales de dos términos se pueden utilizar algunas propiedades de las potencias:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- El producto de a por b se puede representar por:

$$a \cdot b = ab$$

- Al multiplicar 1 o –1 por un término algebraico, el producto se puede representar por:

$$1 \cdot a = a$$
$$-1 \cdot a = -a$$

Ejemplo 1

Calcula el producto de $-4x^2$ y $3x^3$.

1. Agrupamos la multiplicación entre los coeficientes numéricos y entre los factores literales.

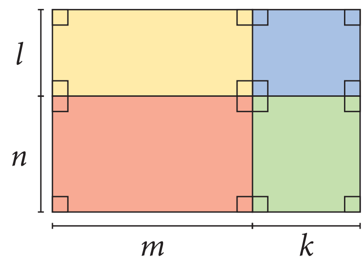
$$(-4x^2) \cdot (3x^3) = (-4 \cdot 3) \cdot (x^2 \cdot x^3)$$

2. Multiplicamos los coeficientes numéricos y los factores literales.

$$-12 \cdot (x^2 \cdot x^3) = -12 \cdot x^{2+3} = -12 \cdot x^5$$

Ejemplo 2

El siguiente rectángulo está compuesto por rectángulos de menor tamaño, ¿cuál es el área total de la figura?



- **1ª estrategia**

Calculamos el área de cada rectángulo y luego las sumamos.

Área rectángulo amarillo: $m \cdot l = ml$
Área rectángulo azul: $l \cdot k = kl$
Área rectángulo rojo: $n \cdot m = mn$
Área rectángulo verde: $n \cdot k = kn$

Área total ▶ $kl + kn + ml + mn$

- **2ª estrategia**

Determinamos la expresión que representa el largo y el ancho de la figura y las multiplicamos para calcular el área.

Largo: $(m + k)$ Ancho: $(l + n)$

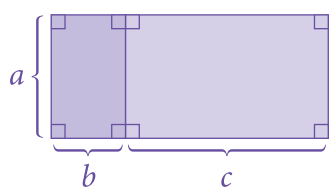
Área total ▶
$$\begin{aligned}(m + k) \cdot (l + n) &= m \cdot (l + n) + k \cdot (l + n)\\ &= m \cdot l + m \cdot n + k \cdot l + k \cdot n\\ &= ml + mn + kl + kn\\ &= kl + kn + ml + mn\end{aligned}$$

- **Propiedad distributiva**

Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ se cumple:

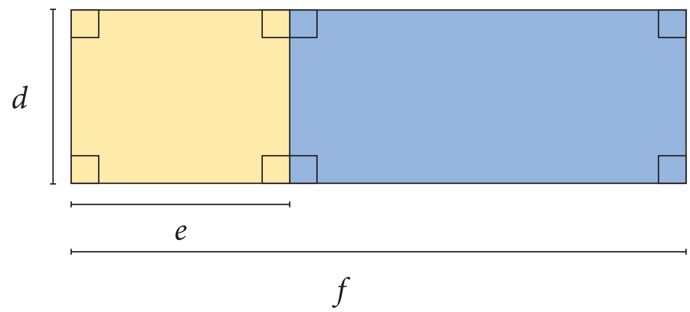
$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$
$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$$

Determina una expresión que represente el área total del siguiente rectángulo:



Ejemplo 3

La siguiente figura está compuesta por dos rectángulos. Considerando las medidas dadas, ¿cómo se puede expresar el área del rectángulo de color azul?



- 1ª estrategia

Calculamos el área del rectángulo compuesto y le restamos el área del rectángulo de color amarillo.

Área rectángulo compuesto ▶ $d \cdot f = df$

Área rectángulo amarillo ▶ $d \cdot e = de$

Área rectángulo azul ▶ $df - de$

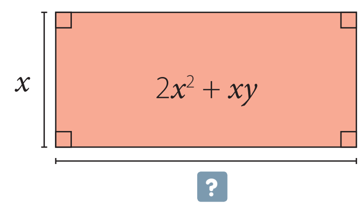
- 2ª estrategia

Determinamos la expresión que representa el largo del rectángulo azul, $(f - e)$, y la multiplicamos por el ancho, d.

Área rectángulo azul ▶ $d \cdot (f - e) = d \cdot f - d \cdot e = df - de$

Ejemplo 4

El área de un rectángulo es $2x^2 + xy$. Si su ancho es x, ¿cuál es la expresión que representa la medida del largo?



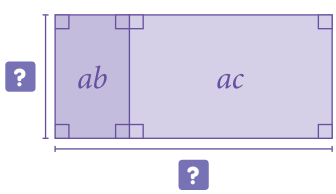
1. Representamos la información con un dibujo.

2. Debemos determinar una expresión que al multiplicarla por x resulte $2x^2 + xy$.

   El largo del rectángulo corresponde a la expresión $2x + y$, ya que:

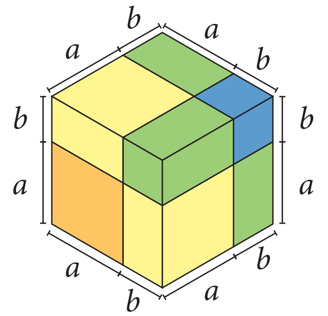
$$x \cdot (2x + y) = 2x^2 + xy$$

Determina una expresión que represente el largo y el ancho del siguiente rectángulo cuya área total es $ab + ac$.



Ejemplo 5

Calcula el volumen del siguiente cubo formado por piezas de colores.



- Para calcular el **volumen de un prisma** se debe multiplicar el área de la base por la altura.

1ª estrategia

Calculamos el volumen de cada pieza y luego los sumamos. Para ello, observamos que la figura está compuesta por 8 piezas: 1 naranja, 1 azul, 3 verdes iguales y 3 amarillas iguales (una de ellas no es visible en la imagen).

Área rectángulo naranja: $a \cdot a \cdot a = a^3$
Área rectángulo azul: $b \cdot b \cdot b = b^3$
Área rectángulo verde: $b \cdot b \cdot a = ab^2$
Área rectángulo amarilla: $a \cdot a \cdot b = a^2b$

Volumen cubo ▶ $a^3 + \underbrace{3a^2b}_{\text{3 piezas amarillas}} + \underbrace{3ab^2}_{\text{3 piezas verdes}} + b^3$

2ª estrategia

Determinamos la medida de la arista del cubo y calculamos su volumen. La arista mide $(a + b)$, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}[(a+b)\cdot(a+b)]\cdot(a+b) &= [a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b)]\cdot(a+b)\\ &= [a^2 + ab + ba + b^2]\cdot(a+b)\\ &= [a^2 + 2ab + b^2]\cdot(a+b)\\ &= a^2\cdot(a+b) + 2ab\cdot(a+b) + b^2\cdot(a+b)\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Una expresión algebraica se puede clasificar según la cantidad de términos.
- **Monomio**: un término.
- **Binomio**: dos términos.
- **Trinomio**: tres términos.
- **Polinomio**: generalmente se consideran cuatro o más términos.

Aprende

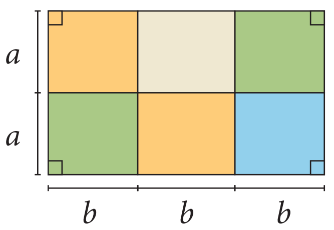
Para **multiplicar expresiones algebraicas** puedes considerar lo siguiente:

- **Monomio por monomio:**
  se multiplican los coeficientes numéricos de los términos y los factores literales, según corresponda. Ejemplo: $2a^2 \cdot 3a = 6a^3$
- **Monomio por polinomio:**
  se multiplica el monomio por cada término del polinomio aplicando la propiedad distributiva. Ejemplo: $3m \cdot (4x + 2 - y) = 12mx + 6m - 3my$
- **Polinomio por polinomio:**
  se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación y luego, de ser posible, se reducen términos semejantes. Ejemplo: $(a + 2) \cdot (3b + c) = a \cdot (3b + c) + 2 \cdot (3b + c) = 3ab + ac + 6b + 2c$

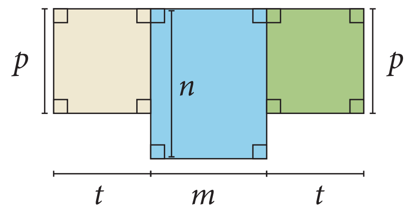
Actividades

1. Representa el área total de las siguientes figuras usando una expresión algebraica.

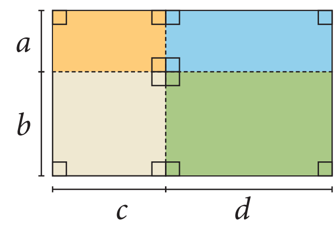
a.



b.

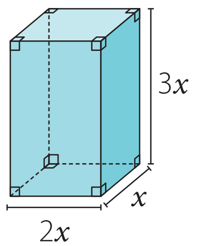


c.

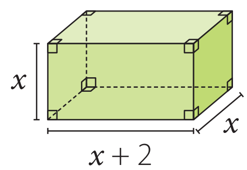


2. Representa el volumen de los siguientes cuerpos geométricos usando una expresión algebraica.

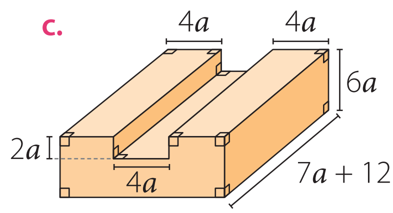
a.



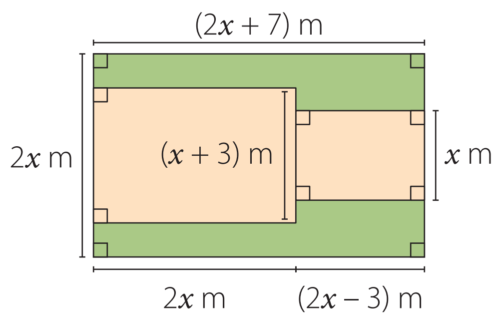
b.



c.



3. En la imagen se muestra el plano de una sala de clases donde se ubicarán distintos elementos. ¿Qué expresión representa el área pintada de color verde?
Compara lo obtenido con tus compañeros.



4. Desarrolla los siguientes productos:

a. $3 \cdot (a + d)$

b. $b \cdot (3d - f)$

c. $2b \cdot (l + 3t - 8b)$

d. $5t \cdot (8d - 2r + d^3)$

e. $(2 + f) \cdot (g + 3h)$

f. $(r + 5t) \cdot (k - g)$

g. $(m - n) \cdot (ñ - p + 1)$

h. $t^2 \cdot (5d - 2l + 11 + t^2)$

5. Considera las siguientes igualdades y luego calcula.

$A = m + 1$ $\quad$ $B = 2m - 3$ $\quad$ $C = 4m - 3n$

a. $2A$

b. $5B$

c. $A \cdot B$

d. $B \cdot C$

e. $2 \cdot (B + C)$

f. $6 \cdot (A - C)$

6. Resuelve las siguientes multiplicaciones de expresiones algebraicas. Luego, reduce términos semejantes.

a. $5x \cdot 8x$

b. $(8 - 4y^2 + 3x^2) \cdot 10xy$

c. $(-x^2 + 2x) \cdot (5x - 0{,}5x^2)$

d. $(11mn + 3m^2n) \cdot (-4mn^2 - mn + 0{,}25)$

e. $\left(\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy\right)$

f. $\left(\frac{1}{5}a - \frac{3}{2}b - 2\right) \cdot \left(-2a - \frac{1}{7}b + 1\right)$

g. $\left(\frac{2}{3}x^3y - \frac{4}{7}xy\right) \cdot \left(\frac{5}{8}xy - \frac{6}{5}x^2y\right)$

h. $(-4ab^2 + 3a^2b^2 - 5ab^2 - 2) \cdot (-6ab + 5)$

7. Dibuja en tu cuaderno un rectángulo cuya área corresponda a la expresión dada en cada caso.

a. b^2

b. $f \cdot j$

c. $f \cdot (g + 2)$

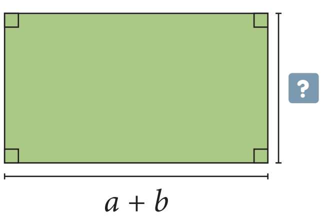
d. $(a + d) \cdot (r + c)$

e. $a \cdot (b + c)$

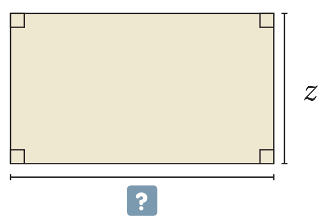
f. $(k + 1) \cdot (r + 3)$

8. Determina la medida del lado desconocido en cada rectángulo considerando el área dada.

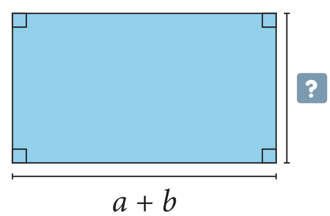
a. Área ▶ $3a + 3b$



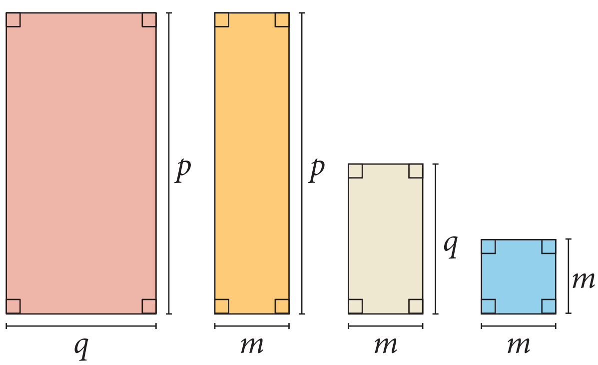
b. Área ▶ $zn + zm$



c. Área ▶ $ac + bc + a + b$



9. En parejas, observen las siguientes figuras y luego realicen lo pedido.



a. Determinen una expresión algebraica que represente el área de cada una de las figuras.

b. Con las cuatro figuras, formen un rectángulo, dibújenlo en sus cuadernos y respondan:

- ¿Cuáles son las medidas del largo y del ancho?
- ¿Cuál es el área del rectángulo? ¿Cómo se relaciona el área con lo calculado en **a.**?

Cuaderno de Actividades
Páginas 40 y 41.

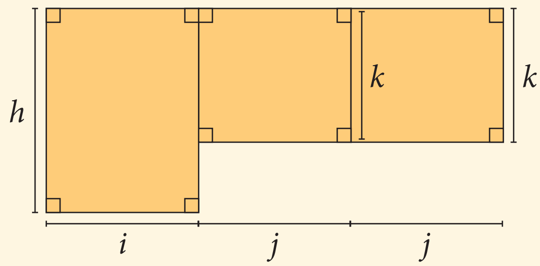
Reflexiona y responde

- Al multiplicar expresiones algebraicas, ¿cuál crees que es el error más frecuente?, ¿qué puedes hacer para no cometerlo?
- ¿Crees que intercambiar opiniones con tus compañeros aporta a tu aprendizaje? ¿Por qué?
- ¿Cómo multiplicas expresiones algebraicas? Explícale a un compañero

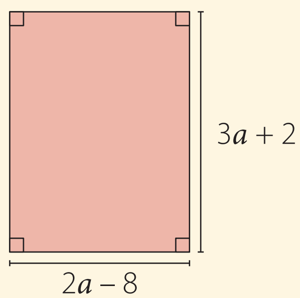
Evaluación Lección 1

1. Determina una expresión algebraica reducida para representar el perímetro y el área de las siguientes figuras.

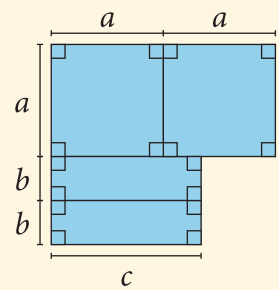
   a. Figura compuesta por rectángulos.



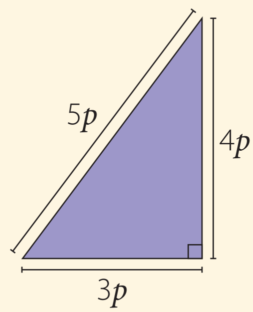
   b. Rectángulo.



   c. Figura compuesta por cuadrados y rectángulos.



   d. Triángulo rectángulo.



2. Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones reduciendo términos semejantes.

   a. $10 + 7n + 11n + 7$

   b. $-4ab + 6ab - ab$

   c. $-8xy + 3x - xy$

   d. $7ab^2 + b^2a - 8a^2b + \frac{1}{2}ba^2$

   e. $0{,}5x + 0{,}66y - x + 1{,}4y$

   f. $\frac{p}{2} - \frac{2}{5}q + 5q - \frac{2}{5}q$

   g. $x - 2x - 3x - 8 + 4x - 5x - 12$

   h. $4a^2 - n^2 + 100a^2 - n^2 + 3n^2$

3. Desarrolla los siguientes productos.

   a. $7 \cdot (a + b)$

   b. $b \cdot (5d - b)$

   c. $4b \cdot (p + 6d)$

   d. $3t \cdot (4t - 2r)$

   e. $(2 + g) \cdot (g + 3t)$

   f. $(4p + 5t) \cdot (p - 3)$

   g. $(m - n) \cdot (p - q)$

   h. $(x + 2y)(x - 3y)$

   i. $9d \cdot (5d - 2l)$

4. Considera las siguientes igualdades y luego calcula.

$\boxed{A = p + 2}$ $\boxed{B = 2m - 1}$ $\boxed{C = 5p - 3m}$

   a. $A + B$

   b. $A - C$

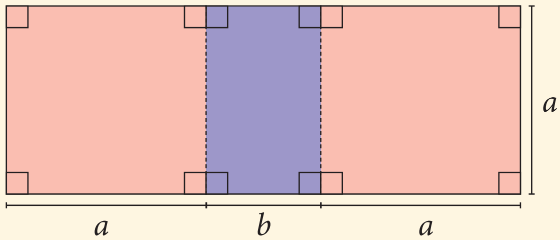
   c. $B \cdot C$

   d. $A \cdot B$

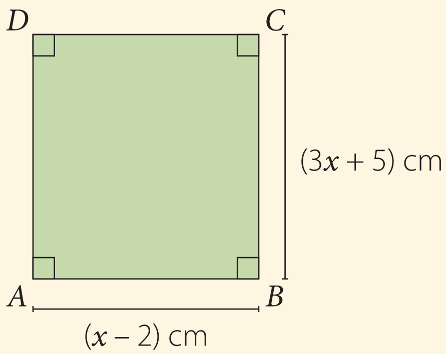
   e. $2 \cdot (A - C)$

   f. $5 \cdot (A + C)$

5. **Representa el área del rectángulo de mayor área con una expresión algebraica.**



6. **Observa el rectángulo $ABCD$ y luego realiza lo pedido.**



a. Determina una expresión que represente su perímetro.

b. Determina una expresión que represente su área.

c. Determina una expresión que represente su área si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ aumentan en 3 cm.

d. Determina una expresión que represente su área si $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ aumentan en $(x - 5)$ cm.

7. **Determina si las siguientes igualdades son verdaderas. Justifica en caso de no serlo.**

a. $3a - 3b = 3(a - b)$

b. $5x^2 - 10x = 5x(x - 2)$

c. $4x^2 + 2x = 2(2x - 2)$

d. $abc - 5c + 2ac = c(ab - 5 + 2a)$

e. $ac - ad + bc - bd = (a + b)(c - d)$

f. $2x^2y + xy^2 + xy = xy(2x + y + 1)$

Cuaderno de Actividades
Páginas 42 y 43.

Reflexiona y responde

- ¿Con qué conocimiento previo puedes relacionar lo que has aprendido sobre expresiones algebraicas? Explica.
- ¿Qué dificultades tuviste en el desarrollo de la lección?, ¿cómo las pudiste superar?
- ¿De qué forma puedes demostrar tus aprendizajes acerca de expresiones algebraicas? Coméntalo con un compañero.

Lección 2 Ecuaciones e inecuaciones

Ecuaciones

Sofía donó un cuarto de sus ahorros a una fundación que se dedica a reciclar y reutilizar distintos tipos de desechos. Su amigo Tomás también quiso contribuir y entre ambos donaron $45 000.

A partir de la información, responde.

- Si Tomás donó $25 000, ¿qué ecuación permite calcular la cantidad donada por Sofía?
- ¿Qué ecuación permite calcular la cantidad de dinero que tenía ahorrado Sofía? ¿Cómo puedes resolver la ecuación?

En esta lección podrás resolver ecuaciones e inecuaciones con números racionales y modelar diversas situaciones de la vida diaria.

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $\frac{x}{4} + 1 = 13$.

1. $\frac{x}{4} + 1 - 1 = 13 - 1$ ········▶ Restamos 1 en ambos lados de la igualdad.

$$\frac{x}{4} = 12$$

$\frac{x}{4} \cdot 4 = 12 \cdot 4$ ········▶ Multiplicamos por 4 cada lado de la igualdad.

$$x = 48$$

- Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que contiene una o más incógnitas.

2. Podemos comprobar la solución reemplazando el valor de x en la ecuación.

$$\frac{48}{4} + 1 = 12 + 1 = 13$$

Como la igualdad se cumple, entonces la solución $x = 48$ es correcta.

Resuelve la ecuación $\frac{x}{3} + 4 = 9$ y comprueba el resultado obtenido. ¿Qué pasos seguiste? Compara tu procedimiento con el de un compañero o compañera.

Ejemplo 2

Resuelve la ecuación $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

1 $\frac{2x}{3} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{5}{6} \cdot 6$ → Calculamos el mcm entre los denominadores, que en este caso es 6, y lo multiplicamos por cada término de la igualdad.

$$4x - 3 = 5$$

$4x - 3 + 3 = 5 + 3$ → Sumamos 3 en ambos lados de la igualdad.

$$4x = 8$$

$\frac{4}{4}x = \frac{8}{4}$ → Dividimos en 4 ambos lados de la igualdad.

$$x = 2$$

2 Comprobamos la solución obtenida: $\frac{2 \cdot 2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

Como se cumple la igualdad, el valor obtenido para x es correcto.

Aprende

- Una **ecuación lineal con coeficientes racionales** es aquella en la que están involucrados números racionales, ya sean fracciones o números decimales. Estas ecuaciones son de la forma:

$$ax + b = c, \text{ con } a, b, c \text{ números racionales y } a \neq 0$$

- Para **resolver** una ecuación con coeficientes fraccionarios se puede calcular el mínimo común múltiplo (mcm) entre los denominadores y multiplicar cada término de la ecuación por dicho número para obtener los coeficientes enteros.

Ejemplo 3

Un trayecto tiene una parte asfaltada y otra sin pavimentar. Tamara recorrió el camino asfaltado y 4,8 km del tramo no pavimentado. Nicolás recorrió el tramo asfaltado más 1,2 km sin pavimentar, pero lo recorrió dos veces. Si ambos realizaron la misma distancia, ¿cuántos kilómetros hay de camino asfaltado?

1 Planteamos la ecuación en la que x representa los kilómetros de camino asfaltado.

Recorrido de Tamara → $\boxed{x + 4{,}8} = \boxed{2(x + 1{,}2)}$ ← Recorrido de Nicolás

2 Resolvemos la ecuación.

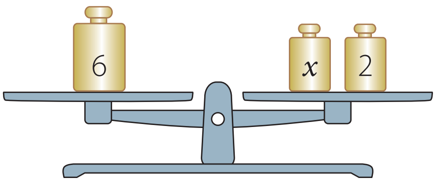
$$x + 4{,}8 = 2(x + 1{,}2)$$
$$x + 4{,}8 = 2x + 2{,}4$$
$$4{,}8 - 2{,}4 = 2x - x$$
$$2{,}4 = x$$

Luego, hay 2,4 km de camino asfaltado.

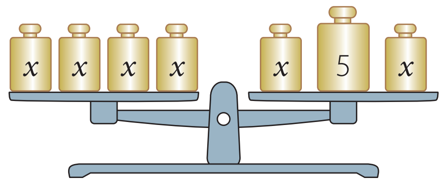
Actividades

1. Representa con una ecuación cada balanza en equilibrio y luego determina el valor de x.

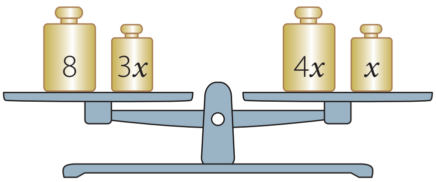
a.



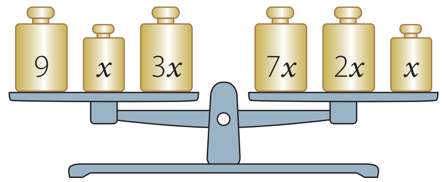
c.



b.



d.



2. Representa las siguientes ecuaciones en una balanza. Para ello, dibújalas en tu cuaderno.

a. $3x = 12$

b. $\dfrac{x}{5} = 4$

c. $\dfrac{3x}{5} = 8$

d. $\dfrac{4x}{9} + 3 = 11$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones que obtengas.

a. $5x - 3 = 9$

b. $-3 + 2x = 5 + 10x$

c. $4 - \dfrac{x}{2} = \dfrac{18}{4}$

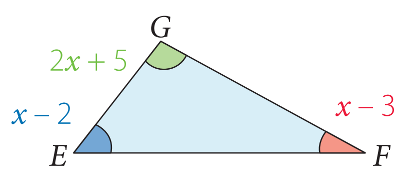
d. $-x + 11 = -2x + 6$

e. $3(x - 6) = 2(9 - 3x)$

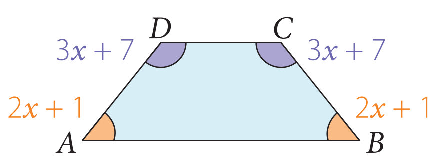
f. $\dfrac{x}{2} = 1 - \dfrac{3x}{4}$

4. Considera la información entregada en cada caso y determina el valor de x.

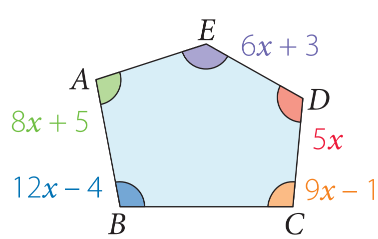
a. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.



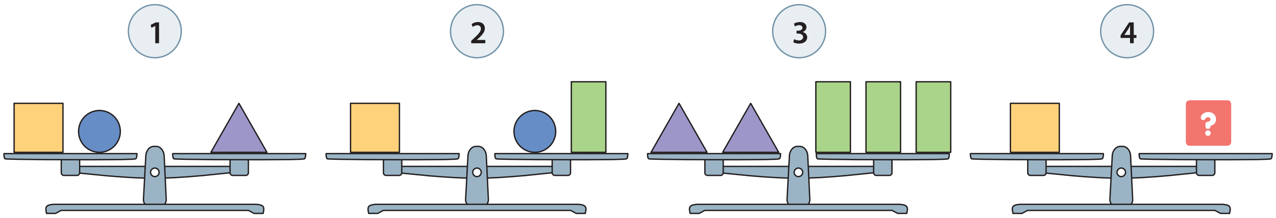
b. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°.



c. La suma de los ángulos interiores de un pentágono es 540º.



5. ¿Cuántos círculos se necesitan para mantener equilibrada la balanza 4?



6. **Representa cada enunciado con una ecuación.**
   a. La suma de dos números consecutivos aumentada en 10 unidades equivale al mayor de ellos aumentado en 9 unidades.
   b. Un número equivale a la cuarta parte del numero disminuido en 3 unidades.
   c. La tercera parte de un número disminuida en 10 unidades equivale al triple del número.
   d. La suma de tres números pares consecutivos equivale a 42 unidades.

7. **Plantea una ecuación para cada problema y luego resuelve.**
   a. La producción de un evento tiene un costo de $1 500 000. Si cada entrada se vende a $10 000, ¿cuántas entradas hay que vender para obtener una ganancia de $800 000?
   b. Sofía compró $\frac{3}{4}$ kg de pan y $\frac{5}{8}$ kg de queso y gastó $4 560. Si el precio de un kilogramo de pan es de $1 080, ¿cuál es el precio de 1 kg de queso?
   c. Tomás tiene tres cuartos de la edad de su hermana mayor. Si las edades de ambos suman 35 años, ¿qué edad tiene su hermana?
   d. Si el perímetro de un rectángulo es de 96,6 cm y la medida del largo es el doble que la medida del ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?
   e. Una avenida está siendo asfaltada por etapas. En la primera etapa se asfaltó la mitad; en la segunda, la quinta parte, y en la tercera, la cuarta parte del total. ¿Cuál es la longitud de la avenida si aún faltan 200 m por asfaltar?

8. **En parejas, analicen la siguiente situación y luego resuelvan.**
   Un joyero regalará su colección de relojes. La mitad se la dará a su hija, la tercera parte del resto se la regalará a su nieta, la mitad de lo que queda se lo entregará a su sobrino y el resto, que son cinco relojes, se los dará a su hermano.
   a. ¿Cuántos relojes tiene su colección?
   b. ¿Cuántos relojes recibirá cada uno?

Cuaderno de Actividades
Páginas 44 a 47.

Reflexiona y responde

- ¿Cómo puedes modelar situaciones usando ecuaciones lineales? Explica.
- ¿Qué hiciste para planificar tu trabajo y comprobar tus resultados?
- Explica tus procedimientos para resolver ecuaciones.

Inecuaciones

En un colegio pusieron los desechos orgánicos en los contenedores que se muestran en la imagen, los cuales se deben llevar a la municipalidad y que sean tratados para ser compost.

Para ello, los trasladan en una furgoneta que puede transportar menos de 1 200 kg.

- El **compost** es un abono orgánico que se obtiene a partir de la descomposición natural, en presencia de oxígeno, de residuos orgánicos.

Analiza la información y luego responde.

- ¿Cuántos kilogramos, como máximo, puede tener cada contenedor si la masa del chofer y del copiloto de la furgoneta suman 186 kg?
- ¿Cómo puedes representar la situación con una inecuación?
- Averigua acerca de los usos del compost. Luego, comenta con tu curso.

Ejemplo 1

Resuelve la inecuación $4x + 1 < 9$.

$$4x + 1 - 1 < 9 - 1$$ Restamos 1 en ambos lados de la desigualdad.

$$4x < 8$$

$$\frac{4}{4}x < \frac{8}{4}$$ Dividimos en 4 ambos lados de la desigualdad.

$$x < 2$$

Una **desigualdad** es una expresión que establece una relación matemática de orden entre dos cantidades, es decir, que indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

- $>$: mayor que
- $<$: menor que

Luego, todos los números menores que 2 satisfacen la desigualdad. Si evaluamos la inecuación con cualquier número menor que 2, la desigualdad se mantendrá, por ejemplo, si $x = 0$, se tiene que:

$$4 \cdot 0 + 1 < 9$$
$$1 < 9$$

Evalúa la inecuación del ejemplo 1 con otros dos números que satisfagan la desigualdad.

Ejemplo 2

Resuelve la inecuación $\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}x + 1 > 8$. Considera que x es un número entero.

$$12 \cdot \frac{2}{3}x - 12 \cdot \frac{5}{4}x + 12 \cdot 1 > 12 \cdot 8$$ Calculamos el mcm, que en este caso es 12, y lo multiplicamos por cada término de la desigualdad.

$$8x - 15x + 12 > 96$$

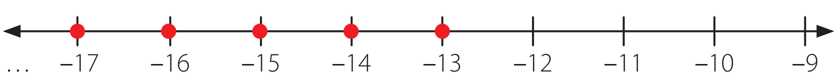
$$-7x + 12 > 96$$

$$-7x + 12 - 12 > 96 - 12$$ Restamos 12 en ambos lados de la desigualdad.

$$-7x \cdot -1 < 84 \cdot -1$$ Multiplicamos por –1 ambos lados de la desigualdad, por lo que cambia el sentido.

$$x < -12$$ Dividimos por 7 ambos lados de la desigualdad.

La solución la podemos representar gráficamente en la recta numérica.



Algunas propiedades de las desigualdades son:

- $a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$
- $a < b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- $a < b, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Con a, b y c números racionales.

En el ejemplo 2, ¿por qué no se marcó el número –12 en la recta numérica?

Ejemplo 3

Una fábrica de maceteros obtiene una ganancia de \$500 por cada macetero que se vende. ¿Cuántos se deben vender para que la ganancia sea de más de \$60 000?

1. Planteamos la inecuación que relaciona los datos del problema.

Ganancia por cada macetero.

$$\boxed{500} \cdot \boxed{x} > \boxed{60\,000}$$

Mayor a \$60 000

Cantidad de maceteros

2. Resolvemos la inecuación.

$$500 \cdot x > 60\,000$$

$$\frac{500}{500}x > \frac{60\,000}{500}$$

$$x > 120$$

3. Comprobamos el resultado. Para ello, evaluamos la inecuación con un número cualquiera mayor que 120, por ejemplo, 130.

$$500 \cdot 130 > 60\,000$$
$$65\,000 > 60\,000$$

Luego, se deben vender más de 120 maceteros.

Aprende

- Una **inecuación lineal con coeficientes racionales** es una desigualdad que tiene una o más incógnitas y sus coeficientes son números racionales. Estas inecuaciones son de la forma:

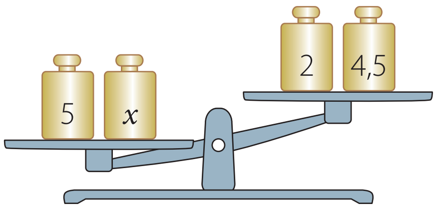
$$ax + b > c \qquad ax + b < c$$
$$\text{con } a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ y } a \neq 0$$

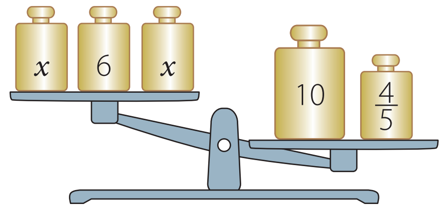
- **Resolver una inecuación** es determinar el conjunto de números que satisfacen la desigualdad.
- Si se multiplican o se dividen ambos lados de una desigualdad por un mismo número negativo, **se cambia el sentido** de la desigualdad. Es decir:

$$a < b;\, c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \qquad a < b;\, c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$
$$\text{con } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Actividades

1. Escribe la desigualdad que representa cada balanza y resuelve la inecuación.

a. 

b. 

2. Resuelve las siguientes inecuaciones y comprueba cada solución.

a. $3x + 5 < 29$

b. $4x - 4 > 24$

c. $3x + 10 < 28$

d. $\frac{3x}{4} > 15$

e. $1{,}5x < 3$

f. $2{,}3x + 5 < 11{,}9$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a. $-x + 4 < 2$

b. $4x - \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$

c. $3(2x + 1) < -4x$

d. $-(x + 4) < 3 - 10x$

e. $\frac{1}{3} + x < \frac{5}{3} + 2x$

f. $4x - \frac{x}{2} > \frac{1}{4} + \frac{5x}{2}$

4. Expresa cada enunciado mediante una inecuación.

a. El cuádruplo de un número es menor que 600.

b. Cinco unidades más el triple de un número es menor a 65 unidades.

c. El doble de un número aumentado en dos unidades es siempre menor que el triple del número.

d. Un número aumentado en 5 unidades es mayor que el doble del número disminuido en 15 unidades.

5. Para que sea posible construir un triángulo, la medida de cada lado debe ser menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia. Determina cuánto puede medir el lado desconocido si dos de ellos tienen las medidas indicadas en cada caso.

a. 3 cm y 7 cm

b. 4,5 cm y 9,7 cm

c. $\frac{3}{4}$ cm y $\frac{3}{2}$ cm

6. Resuelve los siguientes problemas.

a. Un camión que transporta automóviles soporta menos de 4 300 kg de carga. ¿Cuál es la mayor cantidad de automóviles de 850 kg cada uno que puede transportar?

b. El centro de alumnos de un colegio quiere realizar algunos arreglos que tienen un costo de $1 000 000. Para hacerlos, pide colaboración por medio de una rifa. Cada número cuesta $250. ¿Cuál es la menor cantidad de números que deben vender para lograr su objetivo?

c. El perímetro de un terreno con forma de rectángulo debe ser menor que 10 km. Si el lado menor debe medir 2 km, ¿qué medida puede tener el otro lado?

d. Un ascensor soporta menos de 750 kg. Si suben 9 personas y una de ellas tiene una masa corporal 90 kg, ¿cuál es la masa máxima que pueden tener en total el resto de las personas?

Herramientas tecnológicas

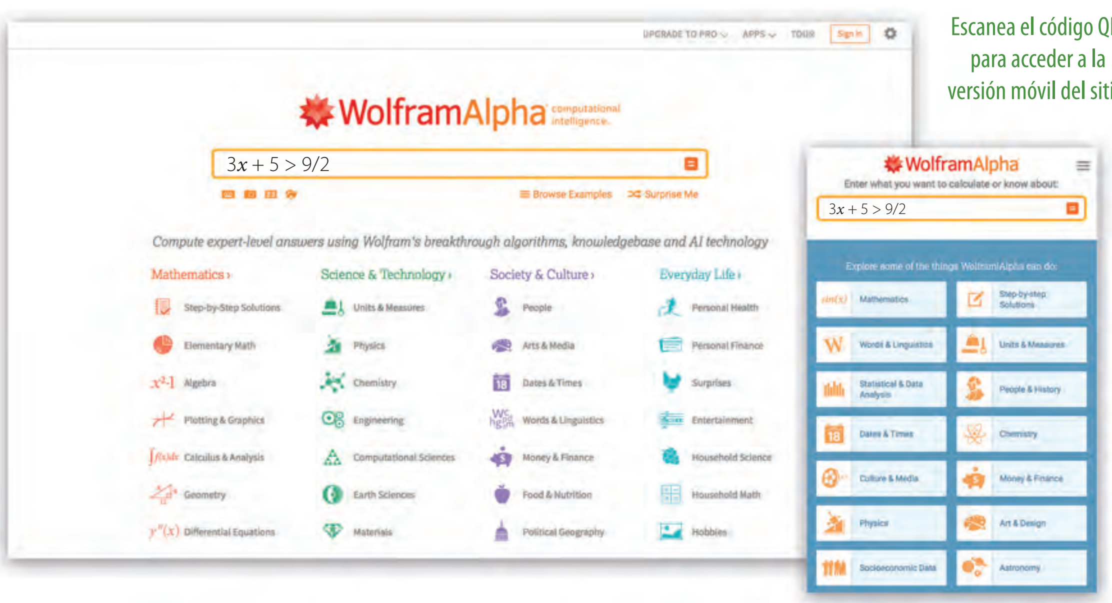
Utilizando WolframAlpha puedes resolver diversos problemas matemáticos. A continuación, te mostramos cómo resolver inecuaciones.

WolframAlpha

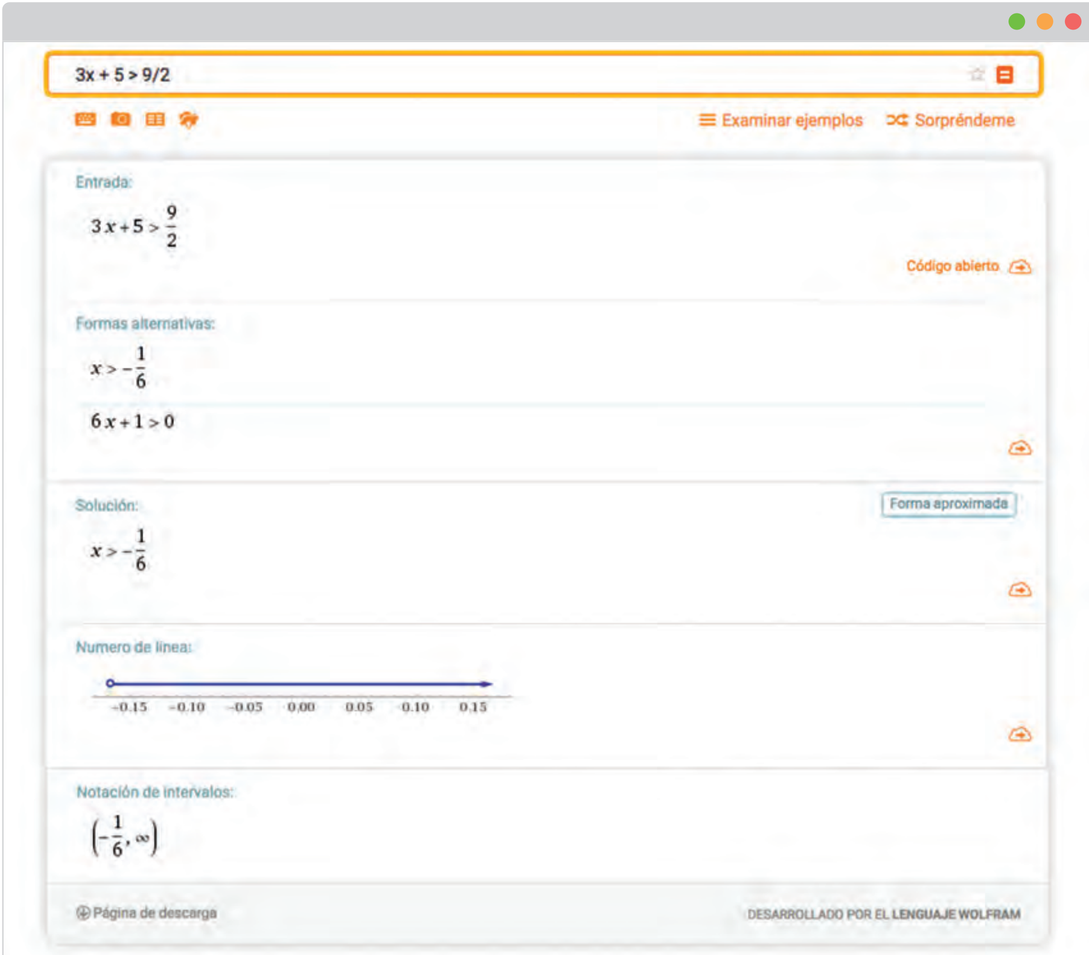
1. Ingresa al sitio *www.wolframalpha.com*
2. En la barra escribe la inecuación por resolver, por ejemplo: $3x + 5 > \frac{9}{2}$, y luego presiona *Enter*.

- Para escribir fracciones se debe usar el símbolo "/".
- Para la coma decimal, debes escribir un punto.

Escanea el código QR, para acceder a la versión móvil del sitio.



③ Aparecerá un listado con diferentes opciones, entre ellas se tiene:



Responde:

1. Utiliza WolframAlpha y resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $-x+6<24{,}6$

b. $20x-\frac{1}{5}>\frac{x}{2}$

c. $6(2x+7)<-4x$

d. $\frac{2}{3}+x<\frac{4}{3}-5x$

e. $-3x-\frac{x}{2}>\frac{1}{4}+\frac{5x}{2}$

f. $-6(x+2{,}2)<3{,}3-x$

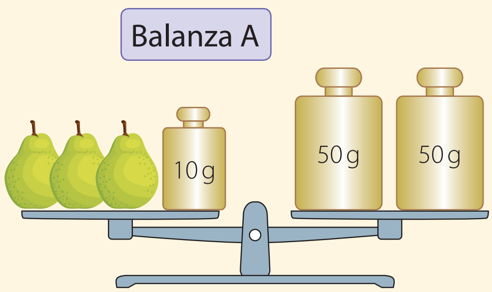
Cuaderno de Actividades
Páginas 48 a 51.

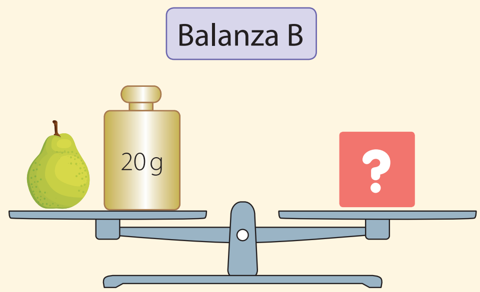
Reflexiona y responde

- ¿Qué estrategias usaste para resolver inecuaciones?
- ¿Cómo te puedes asegurar de que la solución de una inecuación es correcta?
- ¿Qué situaciones de la vida cotidiana puedes resolver usando inecuaciones? Ejemplifica.

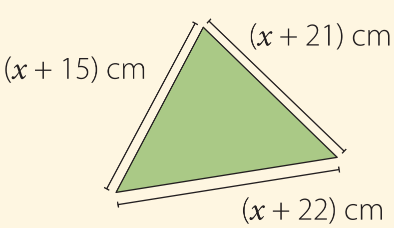
Evaluación Lección 2

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba tu solución.
   - a. $8x + 6 = 42$
   - b. $12 + 4x = -12 - 28x$
   - c. $-x + 3{,}4 = -2x + 6{,}4$
   - d. $6 - \frac{3x}{2} = \frac{7}{4}$
   - e. $8(x - 2) = 2(17 - 3x)$
   - f. $\frac{x}{6} = 12 - \frac{3x}{4}$
2. Resuelve las siguientes inecuaciones.
   - a. $x + 5 < 15$
   - b. $5(4x + 3) < -2x$
   - c. $5x - \frac{1}{3} > \frac{2}{3}$
   - d. $-(x + 5) < 7 - 20x$
   - e. $\frac{1}{5} + x < \frac{3}{5} + 6x$
   - f. $5x - \frac{x}{2} > \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$
3. Las peras que se muestran en las balanzas son idénticas entre sí. La Balanza A se encuentra en equilibrio. ¿Cuál es la masa que se debe agregar a la Balanza B para que también esté en equilibrio?

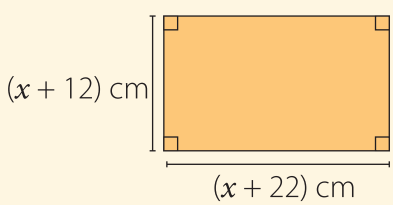




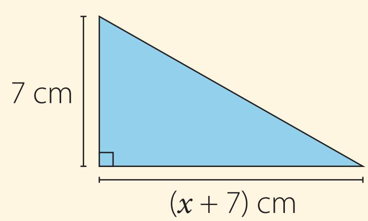
4. Expresa cada enunciado mediante una inecuación.
   - a. El triple de un número, más 3 unidades, es menor que 336.
   - b. Siete unidades más el doble de un número es menor a 75 unidades.
   - c. La cuarta parte de un número aumentado en 2 unidades es siempre menor que el triple del número.
   - d. Un número disminuido en 7 unidades es mayor que el triple del número, disminuido en 15 unidades.
5. Considera la información dada y determina el valor de x en cada caso.
   - a. El perímetro es 73 cm.



   - b. El perímetro es 208 cm.

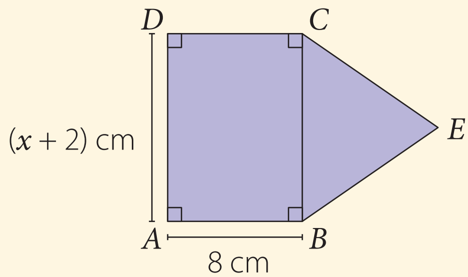


   - c. El área es 56 cm^2.



6. Resuelve los siguientes problemas.

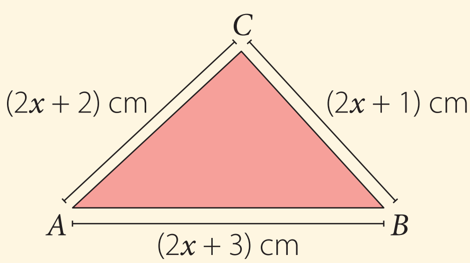
a. Si el perímetro del triángulo equilátero CBE es igual al perímetro del rectángulo $ABCD$, ¿cuál es la medida del lado $\overline{CB}$?

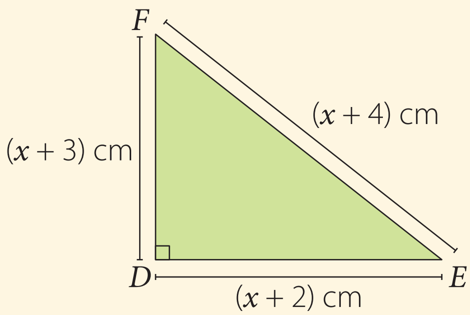


b. La edad de Ana es la mitad de la de Tomás más 15 años. Si sus edades suman 45 años, ¿cuál es la edad de Tomás?

c. Hugo compró $\frac{3}{4}$ kg de almendras y $\frac{2}{5}$ kg de pasas y gastó \$8 645. Si el precio de un kilogramo de pasas es de \$3 800, ¿cuál es el precio de un kilogramo de almendras?

d. Los triángulos que se muestran tienen el mismo perímetro. ¿Cuál es el área del triángulo DEF?

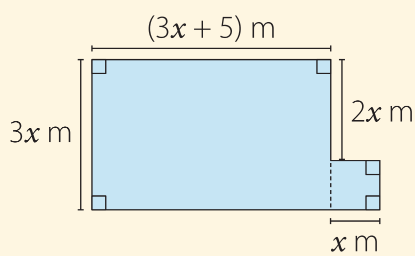




e. Para poder asistir a un taller de yoga se debe pagar una cuota mensual de \$8 000 y luego \$500 por cada vez que se asiste. ¿Cuántas veces puede ir Sofía si no quiere gastar más de \$15 000 mensuales?

f. Si el perímetro de un cuadrado debe medir menos de 2,8 m, ¿cuál es la medida que puede tener uno de sus lados?

g. ¿Cuál debe ser el valor de x para que el perímetro de la figura sea menor que 332 m?



Cuaderno de Actividades
Páginas 52 y 53.

Reflexiona y responde

- ¿Qué fue lo que te produjo mayor dificultad?, ¿por qué crees que fue así?
- ¿En qué se diferencian las ecuaciones de las inecuaciones?
- ¿Qué errores cometiste en la resolución de ecuaciones e inecuaciones?, ¿cómo los corregiste?

Lección 3 Funciones

Concepto y representación de una función

Como proyecto de una municipalidad, se han instalado bicicletas estáticas para cargar teléfonos móviles. Por cada hora de pedaleo, a mediana velocidad, se pueden cargar cuatro teléfonos. Si bien la carga no es completa, esta resulta muy útil para cuando la batería se está agotando.

En esta lección comprenderás el concepto de función y conocerás la función lineal y afín y sus representaciones.

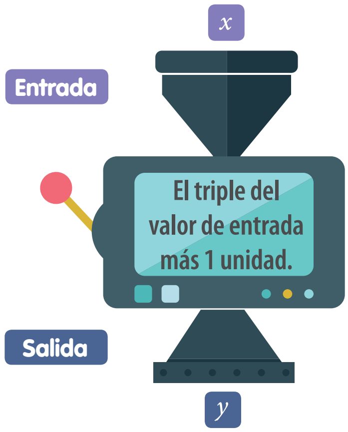
Comenta con tu curso la situación y luego responde.

- ¿Cuántos teléfonos se pueden cargar si se pedalea 5 h?, ¿y si se pedalea 7 h?
- Formula una expresión que calcule la cantidad de teléfonos que se pueden cargar según las horas de pedaleo.
- En la expresión de la pregunta anterior, ¿cuáles son las variables involucradas?
- En tu cuaderno, completa la siguiente tabla:

Horas de pedaleo	1	2	3	4	5	6	7
Teléfonos cargados	?	?	?	?	?	?	?

Ejemplo 1

En una máquina se ingresa un número y sale otro según la indicación dada. Observa la imagen y completa la tabla.



Entrada x	1	2	4	15
Salida y	?	?	?	?

- Una **función** f de un conjunto A en un conjunto B ($f: A \to B$) es una relación que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B.

Conjunto de partida

$f: A \to B$ ⟶ Conjunto de llegada

$x \to y = f(x)$

Preimagen Imagen

1. Calculamos según la instrucción y el valor de entrada.

Entrada 1 ▸ $3 \cdot 1 + 1 = 4$ Entrada 3 ▸ $3 \cdot 4 + 1 = 13$

Entrada 2 ▸ $3 \cdot 2 + 1 = 7$ Entrada 15 ▸ $3 \cdot 15 + 1 = 46$

2. Completamos la tabla.

Entrada x	1	2	4	15
Salida y	4	7	13	46

Ejemplo 2

Miguel vende automóviles. Su sueldo fijo mensual es de \$220 000, y por cada unidad vendida recibe una comisión de \$35 000. ¿Cuál será el sueldo de Miguel si vende nueve automóviles durante un mes? ¿Cuál es la expresión que modela la situación?

1. Construimos una tabla para representar la cantidad de automóviles vendidos y el sueldo de Miguel.

Cantidad de automóviles vendidos	Sueldo
1	\$220 000 + \$35 000 • 1 = \$255 000
2	\$220 000 + \$35 000 • 2 = \$290 000
3	\$220 000 + \$35 000 • 3 = \$325 000

2. Calculamos el sueldo de Miguel si vende nueve automóviles.

$$\$220\,000 + \$35\,000 \cdot 9 = \$535\,000$$

3. Si representamos con y el sueldo recibido por Miguel al vender x automóviles, la situación se puede modelar por la expresión:

$$y = 220\,000 + 35\,000x$$

Aprende

- Una **función** es una relación entre dos variables x e y, de manera que a cada valor de x, llamado **preimagen**, le corresponde un único valor de y, llamado **imagen**.
- Como el valor de y depende del valor de x, se dice que y es la **variable dependiente** y x la **variable independiente**.
- La variable y puede también escribirse como $f(x)$, donde x es la otra variable, y se lee "f de x". Por ejemplo, la función $y = 150 + 25x$, también se puede escribir como $f(x) = 150 + 25x$.

Ejemplo 3

Representa la función f que relaciona los números enteros con su sucesor.

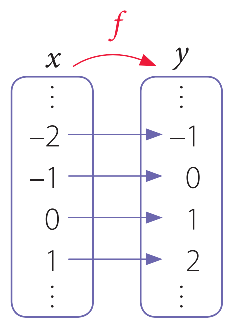
Tabla

Al representar la función f en una tabla de valores obtenemos:

x	…	–2	–1	0	1	…
y	…	–1	0	1	2	…

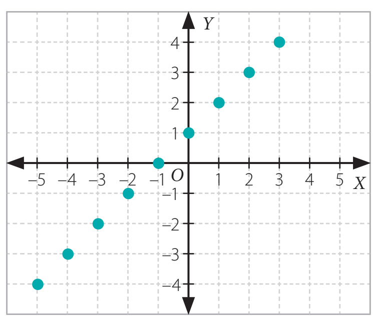
Diagrama

En un diagrama sagital podemos relacionar los elementos por medio de flechas desde el conjunto de partida al conjunto de llegada.



Gráfico

La representación gráfica de la función f es el conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfacen $y = f(x)$.



- Para **representar una función en el plano cartesiano**, los valores de x se representan sobre el eje horizontal o de las abscisas (X), y los valores de y se representan sobre el eje vertical o de las ordenadas (Y).

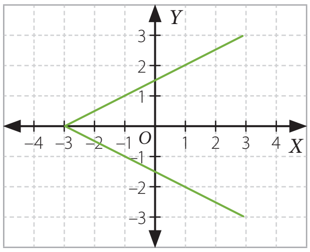
Expresión algebraica

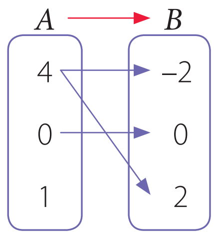
Podemos representar la función f con una expresión algebraica.

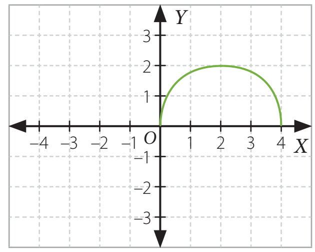
Si x representa un número entero, la expresión $x + 1$ representa a su sucesor.
Entonces tenemos que: $y = x + 1$

Ejemplo 4

¿Cuál de las siguientes representaciones corresponde a una función?







1. El primer gráfico no representa una función, ya que para cualquier valor de x entre –3 y 3 existen 2 valores de y a los que está relacionado. Por ejemplo, para $x = 1$, y toma los valores 2 y – 2.
2. El diagrama no representa una función, ya que el valor 4 en A está relacionado con dos valores en B, –2 y 2, además el valor 1 en A no está relacionado a ningún valor en B.
3. El último gráfico representa una función, ya que para todo valor de x entre 0 y 4 existe un único valor de y.

Ejemplo 5

El valor general de las entradas para una obra de teatro es de $4 500 y la capacidad máxima del teatro es para 150 personas. ¿Cuál es el dominio y cuál el recorrido de la función que modela la cantidad de asistentes y la recaudación de dinero?

1. La función que modela la situación es $y = 4\,500x$, donde la variable independiente x es la cantidad de personas que asisten al teatro y la variable dependiente y es la recaudación de dinero en pesos.
2. Como x representa la cantidad de personas, los valores que puede tomar van desde 0 a 150, y al reemplazarlos en la función resultan los valores de y, es decir, $4\,500 \cdot 0$, $4\,500 \cdot 1$,… $4\,500 \cdot 150$.
3. Luego, el dominio y el recorrido de la función están dados por:

$$Dom(f) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ 150\}$$

$$Rec(f) = \{0, 4\,500, 9\,000, \ldots\ 675\,000\}$$

Aprende

- Se llama **dominio** de una función f (Dom(f)) al conjunto de valores que la variable x puede tomar, es decir, el conjunto de las preimágenes.
- Se llama **recorrido** de una función f (Rec(f)) al conjunto de las imágenes y, es decir, todos los valores que resultan al reemplazar los valores del dominio en la función f.

Actividades

1. **Determina, en cada caso, si la relación entre las variables corresponde o no a una función.**
   - **a.** Un número natural y su opuesto aditivo.
   - **b.** La longitud del lado de un cuadrado y su área.
   - **c.** La cantidad de respuestas correctas en una prueba y la nota final obtenida.

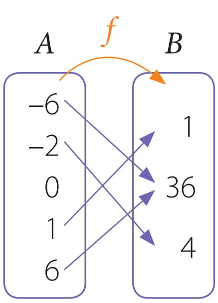
2. **Determina las variables dependiente e independiente en las siguientes relaciones.**
   - **a.** El volumen de un cubo y la medida de su arista.
   - **b.** Un número y su sucesor.
   - **c.** La cantidad de kilogramos de pan y el precio total.

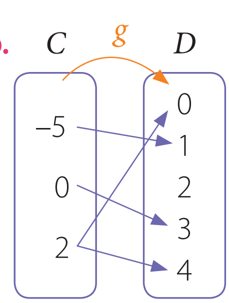
3. **¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar la relación entre los valores de x e y que se muestra en la siguiente tabla?**

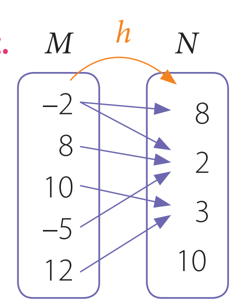
x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	7	9	11	13	15	17

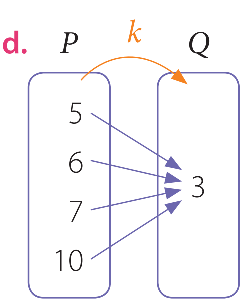
4. **En un triángulo rectángulo, la medida de uno de los ángulos agudos se puede representar por la función $y = 90° - x$.**
   - **a.** ¿Qué representa la variable independiente x en este caso?
   - **b.** ¿Qué valores puede tomar la variable x?, ¿y la variable y?, ¿por qué?
   - **c.** ¿Qué sucede con el ángulo x si el triángulo es isósceles?
   - **d.** Construye una tabla que represente esta situación.

5. **Identifica si los siguientes diagramas representan una función.**

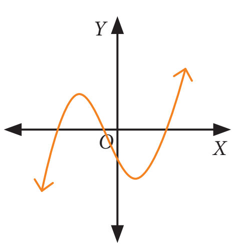
a.


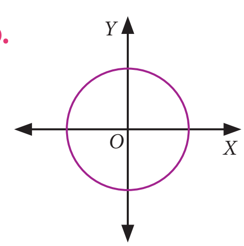
b.


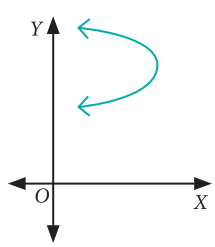
c.


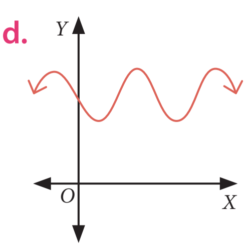
d.


6. **Analiza las siguientes gráficas y determina si representan funciones.**

a.


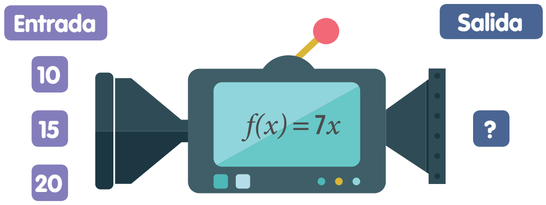
b.


c.


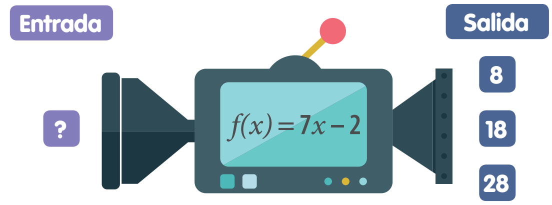
d.


7. Considerando la función dada, determina los valores de entrada o de salida.

a.



b.



8. Construye una tabla de valores para las siguientes funciones. Considera cinco valores en cada caso.

a. $f(x) = 4 \cdot x + 9$

b. $g(x) = -x + 2$

c. $h(x) = -0{,}25 \cdot x + 1$

d. $k(x) = x + 10$

e. $f(x) = -\frac{1}{5} \cdot x$

f. $g(x) = x^2 - 2$

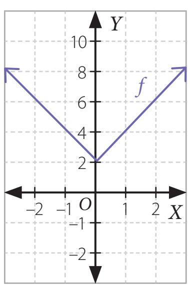
g. $h(x) = 2 \cdot x^2$

h. $k(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 2$

i. $g(x) = x^3$

9. A partir de la gráfica de cada función, determina las imágenes pedidas.

a.

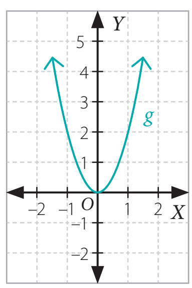


$f(-2)$

$f(0)$

$f(2)$

b.

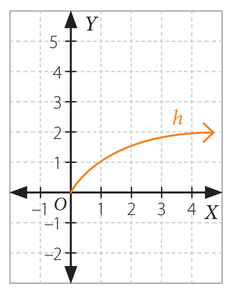


$g(-1)$

$g(0)$

$g(1)$

c.



$h(0)$

$h(1)$

$h(4)$

10. Dado el dominio de cada función, determina el recorrido.

a. $f(x) = 20x$ y $Dom(f) = \{0, 1, 2, 3\}$

b. $g(x) = -5x$ y $Dom(g) = \{0, 3, 6, 9\}$

c. $h(x) = x - 3$ y $Dom(h) = \{-2, -1, 0, 1\}$

d. $j(x) = 3x + 4$ y $Dom(j) = \{0, 5, 10, 15\}$

11. En un laboratorio, cierta sustancia química tiene una temperatura inicial de 20 °C, a partir de la cual aumenta 3 °C por minuto.

a. Determina una expresión algebraica que represente la función temperatura resultante T pasados x minutos.

b. Determina el dominio y el recorrido de la función T. Considera hasta los 60 min.

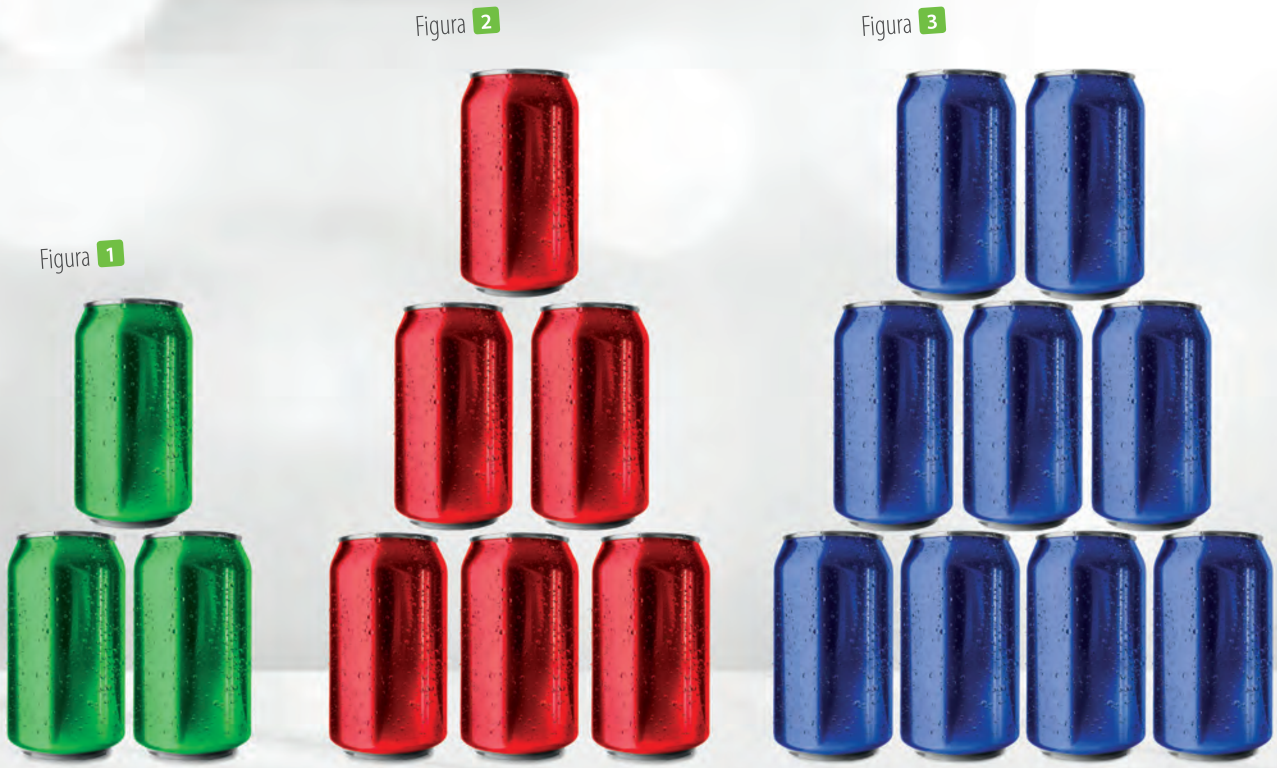
Cuaderno de Actividades
Páginas 54 a 61.

Reflexiona y responde

- ¿Con qué conocimiento previo puedes vincular lo que has aprendido sobre funciones?
- Explica cómo identificar si una relación es una función.

Función lineal

La profesora de Artes Visuales le pidió a sus estudiantes que, en grupos, construyeran obras tridimensionales con materiales reciclados. Un grupo confeccionó figuras con latas de bebidas y las puso por distintas partes del colegio a modo de intervención y como un llamado a seguir la regla de las tres erres: reducir, reutilizar y reciclar. A continuación, se muestran las primeras tres figuras:



Observa la imagen y luego realiza lo pedido.

- Completa en tu cuaderno la siguiente tabla considerando que las figuras siguen un patrón.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Cantidad de latas usadas	?	?	?	?	?	?

- Considerando que x es el número de la figura y $f(x)$ la cantidad de latas utilizadas en cada figura, determina la función que modela esta situación.
- Si se construyeran muchas figuras, ¿cuántas latas ocuparía la figura 456?
- ¿Crees que es importante implementar la regla de las tres erres en tu vida cotidiana? ¿Por qué?

Ejemplo 1

Se tiene un proyector que puede triplicar el tamaño de las letras de un documento según los requerimientos de los usuarios. Si se decide aumentar seis veces el tamaño original de las letras de un escrito, ¿cuál debe ser el aumento previo?

1. El tamaño original del documento se relaciona de manera directamente proporcional con el tamaño en la proyección, por lo tanto podemos representar la función que modela la proyección del documento.

$$f(x) = 3 \cdot x \quad \longrightarrow \text{Función que triplica el tamaño de las letras.}$$

2. Si x representa el tamaño original de las letras y a el tamaño con el aumento previo para que en la proyección el tamaño sea 6 veces el del original, analizamos la siguiente igualdad:

$$f(a) = 6 \cdot x = 3 \cdot 2 \cdot x \;\blacktriangleright\; a = 2 \cdot x \quad \longrightarrow \text{El doble del tamaño original de las letras.}$$

3. El tamaño original debe duplicarse para obtener una proyección en la que el tamaño de las letras sea 6 veces el original.

Aprende

Una **función lineal** f es una función que puede escribirse de la forma: $f(x) = m \cdot x$, con $m \neq 0$.

Una función lineal cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad aditiva: $f(x + z) = f(x) + f(z)$
- Propiedad homogénea: $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$, con $c \neq 0$.

Ejemplo 2

Se tiene la función f definida como $f(x) = 16 \cdot x$. Si a, b, c son números cualquiera, verifica que:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$$

1. Calculamos el valor de $f(a + b)$ y $f(c \cdot x)$ aplicando propiedades numéricas.

$$f(a + b) = 16 \cdot (a + b) = \underbrace{16 \cdot a + 16 \cdot b}_{\text{Propiedad distributiva}} \qquad f(c \cdot x) = 16 \cdot (c \cdot x) = \underbrace{c \cdot (16 \cdot x)}_{\text{Propiedad asociativa}}$$

2. Calculamos $f(a) + f(b)$ y $c \cdot f(x)$.

$$f(a) + f(b) = 16 \cdot a + 16 \cdot b$$

$$c \cdot f(x) = c \cdot (16 \cdot x)$$

3. Verificamos que los resultados obtenidos en 1 coincidan con los obtenidos en 2.

Luego, se cumple que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ y que $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$.

Ejemplo 3

Determina si las funciones $f(x) = 2 \cdot x$ y $g(x) = -x$ representan un crecimiento o un decrecimiento. ¿Qué punto tienen en común?

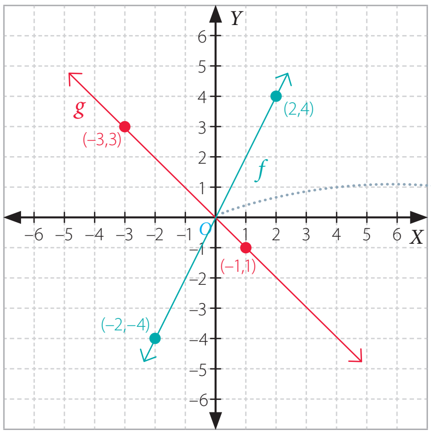
1. Construimos la tabla de valores para cada función.

x	–2	0	2
$f(x)$	–4	0	4

x	–3	0	1
$g(x)$	3	0	–1

- Para **representar una función**, es conveniente registrar los valores en una tabla e identificar algunos pares ordenados que pertenezcan a la gráfica de la función.

2. Graficamos ambas funciones en el plano.



Ambas rectas se intersecan en el origen, es decir, el punto $O(0, 0)$.

3. Al observar la representación gráfica de la función f, es posible notar que los valores $f(x)$ crecen a medida que los de x aumentan. Del mismo modo, los valores de $g(x)$ disminuyen a medida que los de x aumentan. Luego, la función f representa una función creciente y la función g representa una función decreciente.

Aprende

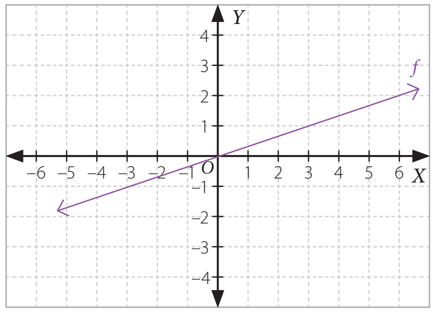
- Una **función lineal** $f(x) = m \cdot x$, con $m \neq 0$, corresponde a una recta que pasa por el origen $O(0, 0)$. El gráfico dependerá del dominio o del conjunto considerado para graficarla.
- El valor m representa la **pendiente de la recta**. Si $m > 0$, la recta es creciente, y si $m < 0$, la recta es decreciente.
- Si se conocen dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que pertenecen a la gráfica de la función f, la pendiente m se puede calcular de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$$

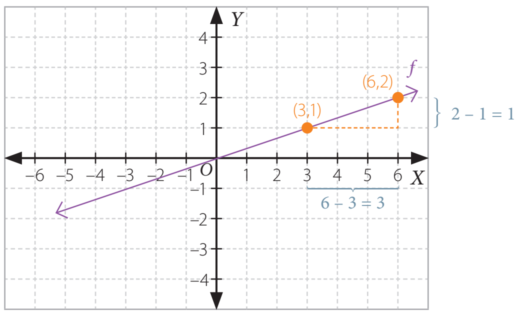
¿Por qué crees que en la definición anterior x_1 debe ser distinto de x_2?

Ejemplo 4

Determina si el punto (12, 4) pertenece a la gráfica de la función lineal f.



1. Ubicamos dos puntos que pertenezcan a la gráfica de la función. En este caso, los puntos son (3, 1) y (6, 2).



2. Determinamos el valor de m y representamos la función lineal f como $f(x) = m \cdot x$.

$$m = \frac{\overset{\text{Diferencia entre las ordenadas de los puntos.}}{(2-1)}}{\underset{\text{Diferencia entre las abscisas de los puntos.}}{(6-3)}} = \frac{1}{3}$$

Luego, $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x$

3. Verificamos si $f(12) = 4$.

$$f(12) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \quad \longrightarrow \quad \text{El punto (12, 4) pertenece a la gráfica de } f.$$

Aprende

Para determinar si un par ordenado (x, y) pertenece a la gráfica de una función, se debe cumplir que $f(x) = y$.

Por ejemplo, para verificar que (2, 7) pertenece a la gráfica de $f(x) = 5x - 3$, se debe comprobar que $f(2) = 7$. Es decir, $f(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7$.

Actividades

1. Determina si las siguientes son funciones lineales.

   a. $h(x) = 2x - 4$

   b. $f(x) = \frac{3}{2}x$

   c. $g(x) = -5x$

   d. $j(x) = 2x + \frac{5}{9}$

2. Un bus interurbano viaja al sur a una rapidez constante. Una pantalla informa a los pasajeros la distancia recorrida y el tiempo transcurrido, como se muestra a continuación:

   Distancia recorrida: **180 km**
   Tiempo: **2 h**

   Distancia recorrida: **270 km**
   Tiempo: **3 h**

   a. ¿A qué rapidez viaja el bus?

   b. ¿Qué datos del viaje aparecerán en la pantalla media hora más tarde?

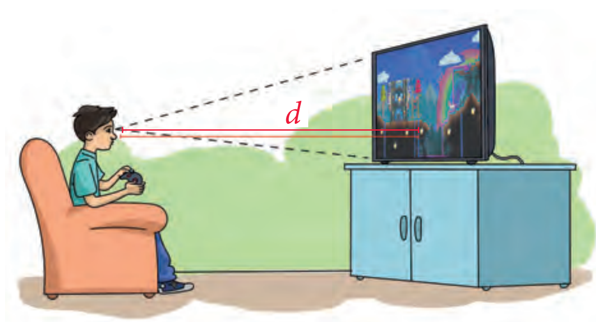
   c. Si x representa la cantidad de horas transcurridas e y la distancia recorrida, completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

x	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
y	?	?	?	?	?	?	?	?

3. Carlos leyó que la distancia óptima d, en centímetros, a la que debe ubicarse una persona frente al televisor se puede expresar mediante la función d, dada por $d(x) = 5 \cdot x$, donde x es la medida de la diagonal de la pantalla del televisor en centímetros.

   a. Si Carlos siguió la recomendación anterior y se ubica a 266,7 cm de la pantalla de su televisor, ¿cuántos centímetros mide la diagonal (x) de la pantalla?

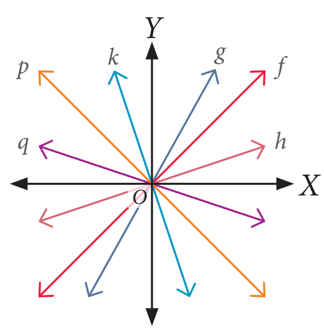
   b. ¿A cuántos centímetros del televisor debe ubicarse un televidente si la diagonal del aparato mide 29 pulgadas? (Una pulgada equivale aproximadamente a 2,54 cm).



4. Observa la siguiente representación gráfica y luego responde.

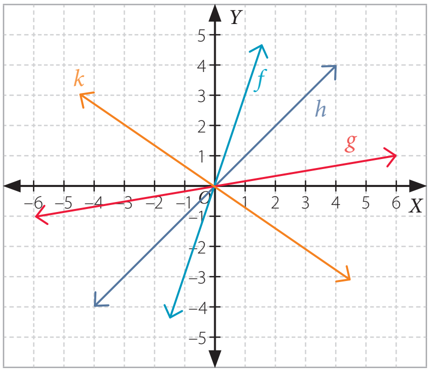
   a. ¿Qué funciones tienen pendiente positiva y cuáles pendiente negativa?

   b. ¿Qué punto en común tienen las gráficas? ¿Es el único?, ¿por qué?



5. Considerando la gráfica, determina a qué función pertenecen los siguientes puntos.

a. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
b. $B\,(-0{,}5; -1{,}5)$
c. $C\,(2; -1{,}5)$
d. $E\,(-2, -2)$
e. $F\,(6, 1)$
f. $D\left(\frac{2}{5}; 0{,}4\right)$
g. $G\,(-6, -1)$



6. En parejas, analicen la siguiente información y luego realicen lo pedido.

El Banco Central de Chile es un organismo que tiene la autoridad exclusiva de emitir billetes y monedas y debe regular la cantidad de dinero que hay en circulación.

a. Averigüen a cuántos pesos chilenos equivale un dólar y, según esto, completen la siguiente tabla en sus cuadernos. Utilicen la calculadora si es necesario.

Dólar (USD)	0	100	1 000	1 500	2 500
Pesos chilenos (CLP)	?	?	?	?	?

b. Representen algebraicamente la función que modela la relación entre el peso chileno y el dólar.

c. Representen gráficamente la función usando los datos de la tabla.

d. Investiguen a cuánto equivalía, aproximadamente, el dólar en pesos chilenos hace un año. ¿Por qué creen que varía este valor? Comenten con su curso.

7. Representa gráficamente las siguientes funciones lineales en tu cuaderno.

a. $f(x) = -x$
b. $g(x) = \frac{x}{2}$
c. $h(x) = 1{,}5x$
d. $j(x) = -0{,}5x$

8. Verifica si para la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x$ se cumplen las siguientes propiedades.

a. $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, para $x = 2$ y $k = 4$.

b. $f(x + z) = f(x) + f(z)$, para $x = 2$ y $z = -6$.

c. $f(x - k \cdot z) = f(x) - k \cdot f(z)$, para $x = -8$, $k = 2$ y $z = 10$.

d. $k \cdot f(x + z) = k \cdot f(x) + k \cdot f(z)$ para $x = -10$, $z = 6$ y $k = -2$.

Cuaderno de Actividades
Páginas 62 a 67.

Reflexiona y responde

- ¿Con qué aprendizaje previo puedes relacionar las funciones lineales?
- ¿Crees que usaste la tecnología en forma responsable? ¿Por qué?
- ¿Qué es una función lineal? Explica con tus palabras.

Función afín

En las cuentas de agua, generalmente, se especifica el cargo fijo, los metros cúbicos consumidos y los montos que se van a pagar por agua potable y por servicio de alcantarillado, los cuales dependen de la cantidad de metros cúbicos consumidos.

Analiza la información de la imagen y luego realiza lo pedido.

- En tu cuaderno, completa la tabla que relaciona los metros cúbicos consumidos y el total a pagar.

Consumo (m^3)	1	10	25	30
Total a pagar ($)				

- ¿Cuál es la función que relaciona el total por pagar (y) y los metros cúbicos consumidos (x)?
- Explica en qué se diferencia la función que formulaste con respecto a la función lineal.

Ejemplo 1

La gráfica de la función $f(x) = m \cdot x + c$, pasa por los puntos $A(-2, 0)$ y $B(0, 6)$. Completa la tabla con los valores de las imágenes ($f(x)$) y preimágenes (x) de f.

x	–4		–2	0	4		8
$f(x) = m \cdot x + n$		–3	0	6		–18	

1. Calculamos la pendiente de la función f.

$$m = \frac{6-0}{0-(-2)} = \frac{6}{2} = 3$$

Diferencia entre las ordenadas de los puntos A y B.

Diferencia entre las abscisas de los puntos A y B.

2. Reemplazamos el valor de m en la expresión $f(x) = m \cdot x + c$ y calculamos el valor de c a partir de la igualdad $f(0) = 6$, ya que el punto $B(0, 6)$ pertenece a la gráfica de f.

$$f(x) = 3 \cdot x + c \;\blacktriangleright\; f(0) = 3 \cdot 0 + c = 6 \;\blacktriangleright\; c = 6$$

Luego, se tiene que $f(x) = 3 \cdot x + 6$ y al completar la tabla obtenemos:

x	–4	**–3**	–2	0	4	**–8**	8
$f(x) = m \cdot x + n$	**–6**	–3	0	6	**18**	–18	**30**

Aprende

Una **función afín** es una función de la forma $f(x) = m \cdot x + c$, con m y c distintos de cero. La constante m es la **pendiente** y c el **coeficiente de posición**, el cual corresponde al valor en el eje Y por donde pasa su gráfica.

Ejemplo 2

En un experimento, una sustancia que se encuentra a 10 ºC aumenta su temperatura a razón de 3 ºC por minuto. Si f representa la temperatura de la sustancia y t los minutos transcurridos, ¿cuál es el valor de c si se sabe que $f(t+1) = f(t) + c$?

1. Representamos la función f que modela la situación.

Temperatura inicial $\longrightarrow f(t) = \boxed{10} + \boxed{3 \cdot t} \longleftarrow$ Aumento de temperatura por minuto.

2. Representamos la expresión algebraica para $f(t+1)$.

$$f(t+1) = 10 + 3 \cdot (t+1) = 10 + 3 \cdot t + 3 \cdot 1 = 13 + 3 \cdot t$$

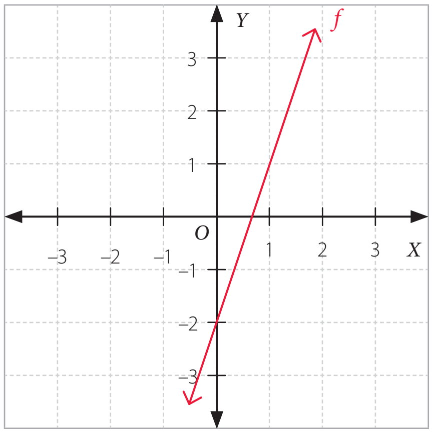
3. Calculamos el valor de c.

$$f(t+1) = f(t) + c \dashrightarrow c = f(t+1) - f(t) = 13 + 3 \cdot t - (10 + 3 \cdot t) = \boxed{3}$$ $\longleftarrow$ Cambio de temperatura por minuto.

Luego, se tiene que $c = 3$

Ejemplo 3

Representa algebraicamente la función mostrada en el gráfico.



1. La función f es afín, por lo tanto, podemos representarla como $f(x) = mx + c$. Luego, como la gráfica de la función corta al eje Y en el punto (0, –2), el valor de c es –2.

2. Reemplazamos el valor de c en la expresión.

$$f(x) = mx + (-2)$$

3. Como el punto (1, 1) pertenece a su gráfica, se cumple que $f(1) = 1$.

$$f(1) = m \cdot 1 + (-2) = 1 \;\blacktriangleright\; m + (-2) = 1 \;\blacktriangleright\; m = 3$$

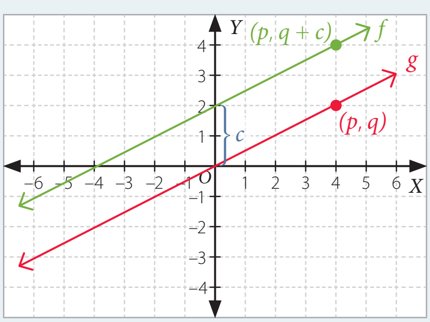
Entonces, $f(x) = 3x + (-2)$, o bien $f(x) = 3x - 2$.

¿En qué se diferencian la gráfica de la función afín a la gráfica de la función lineal?

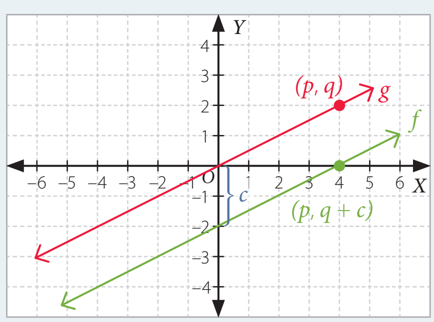
Aprende

Una **función afín** $f(x) = m \cdot x + c$, con m y c distintos de cero, se puede **representar** como la gráfica de una función lineal $g(x) = m \cdot x$ trasladada c unidades hacia arriba o hacia abajo según corresponda.

- Si $c > 0$:

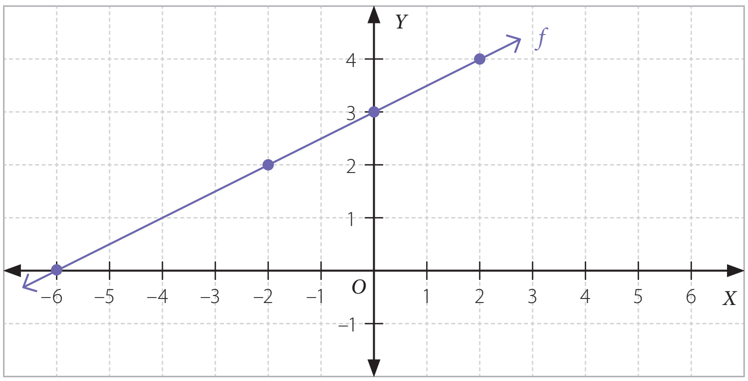


- Si $c < 0$:



Ejemplo 4

Los puntos P, Q y R pertenecen a la gráfica de f. Determina la coordenada que falta en cada uno de ellos.



$P(6, ?)$

$Q(-8, ?)$

$R(-10, ?)$

1. La función f es afín, por lo tanto la representamos como $f(x) = mx + c$. Como la gráfica de la función corta al eje Y en el punto (0, 3), el valor de c es 3. Al reemplazar este valor obtenemos $f(x) = mx + 3$.

2. Los puntos (–2, 2) y (2, 4) pertenecen a la gráfica de f, por lo tanto podemos calcular la pendiente m de la recta.

$$m = \frac{4-2}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La pendiente m de una recta está relacionada con su inclinación y puede interpretarse como la variación de y por cada unidad que varía x.

Luego, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 3$.

3. Calculamos el valor $f(6)$, $f(-8)$ y $f(-10)$.

$$f(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 = 3 + 3 = 6 \quad \blacktriangleright \; P(6, 6)$$

$$f(-8) = \frac{1}{2} \cdot -8 + 3 = -4 + 3 = -1 \quad \blacktriangleright \; Q(-8, -1)$$

$$f(-10) = \frac{1}{2} \cdot -10 + 3 = -5 + 3 = -2 \quad \blacktriangleright \; R(-10, -2)$$

La coordenada faltante en cada punto es la imagen de la abscisa del punto.

Aprende

En una función afín de la forma $f(x) = mx + c$ se tiene que:

- Si $m \neq 0$ y $c = 0$, la función f es una función lineal.
- Si $m = 0$ y $c \neq 0$, la función f es una función constante, es decir, para todo $x \in Dom(f)$ se tiene que $f(x) = c$.

Actividades

1. Determina si las siguientes son funciones lineales o afines. Justifica tu respuesta.

   a. $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$

   b. $h(x) = 3x - 5$

   c. $g(x) = -2x + 6$

   d. $j(x) = x + \frac{5}{9}$

   e. $k(x) = -\frac{5}{4}x$

   f. $l(x) = x - 5{,}5$

2. Determina para cada función el valor de la pendiente y las coordenadas del punto en el que corta al eje Y.

   a. $f(x) = -3x + 6$

   b. $h(x) = -x + 10$

   c. $g(x) = -9x + 1{,}5$

   d. $j(x) = -2x - \frac{5}{9}$

   e. $k(x) = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

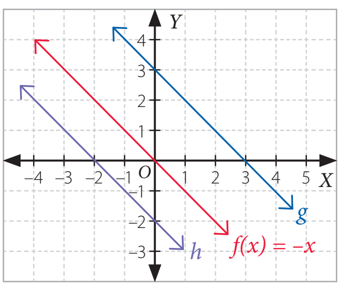
   f. $h(x) = -2{,}4 + x$

   g. $k(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x$

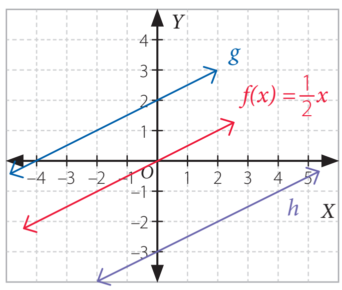
   h. $f(x) = 4{,}4 + 5x$

3. Determina la expresión algebraica que representa a las funciones g y h en cada caso.

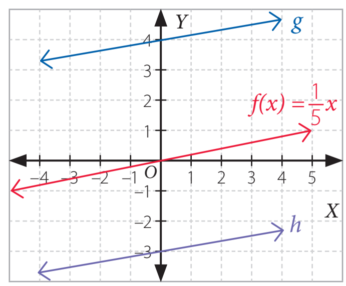
   a.



   b.



   c.



4. Grafica la función que pasa por los puntos dados en cada caso. Luego, determina su pendiente y el punto donde corta al eje Y.

   a. $R(1, -1)$ y $E(3, 4)$

   b. $N(-1, 4)$ y $M(1, 4)$

   c. $A(4, 0)$ y $G(0, 3)$

5. Los planes de dos empresas de telefonía son:

   a. ¿Qué función modela el total a pagar en la compañía *¡Habla ya!*? ¿Y en la compañía *¡Habla siempre!*?

   b. ¿Cuál es el cobro, en ambas compañías, si se hablan 50 min? ¿Y si se hablan 80 min?

   c. Grafica cada función en el plano cartesiano.

   d. Según las gráficas que construiste, ¿en qué condiciones es más conveniente la compañía *¡Habla ya!*?

6. **Resuelve los siguientes problemas.**
   - a. La temperatura de un lugar es de 5 ºC al mediodía y después desciende 4 ºC cada hora. ¿Cuál es la función afín que modela esta situación y cuál será la temperatura a las 20:00 horas?
   - b. El nivel del agua de un estanque era inicialmente de 240 cm y su contenido desciende a razón de 6 cm por minuto. ¿Cuál es la función afín que modela esta situación y cuál será el nivel del agua luego de 40 min?
   - c. En una cuenta telefónica se cobra un cargo fijo de $300, y por cada minuto, $100. ¿Cuál es la función afín que modela esta situación y cuál será el monto a pagar si se hablan 120 min?

7. **Analiza la siguiente información y luego resuelve el problema.**

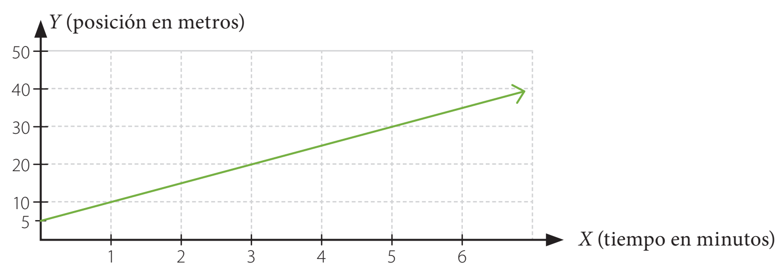
> Cuando se hace una inversión con un interés simple anual se puede obtener el capital final (A) mediante la expresión:
> $$A = b + b \cdot r \cdot t$$
> donde b es el capital inicial; r, la tasa de interés anual, y t, el tiempo en años.

Pedro abrió una cuenta de ahorro y depositó $150 000. Si la tasa de interés simple es de 5% anual y durante 2 años no se realizan depósitos ni giros, ¿cuál es el saldo de la cuenta luego de este tiempo?

8. **Reúnete con un compañero o compañera y analicen la representación gráfica de las siguientes funciones. ¿Cuáles son las semejanzas y las diferencias entre sus gráficas?**

$$f(x) = 2x + 5 \qquad g(x) = 2x \qquad h(x) = 2x - 5$$

9. **Un móvil parte de un punto y se mueve con una rapidez constante. La relación entre el tiempo y su posición se muestra en el siguiente gráfico.**



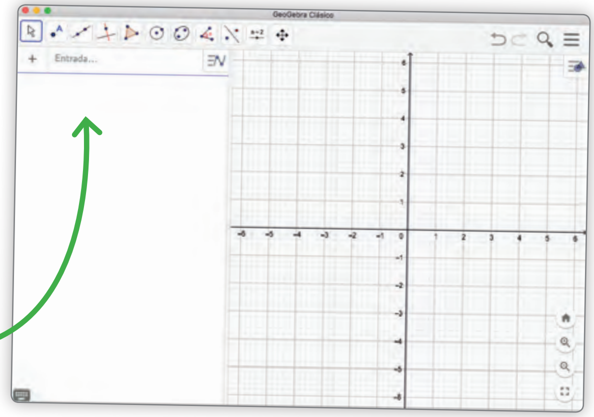
   - a. ¿A qué distancia del punto de referencia (origen) parte el móvil?
   - b. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la función mostrada en el gráfico?
   - c. ¿En qué momento el móvil estará a 80 m del punto de partida?

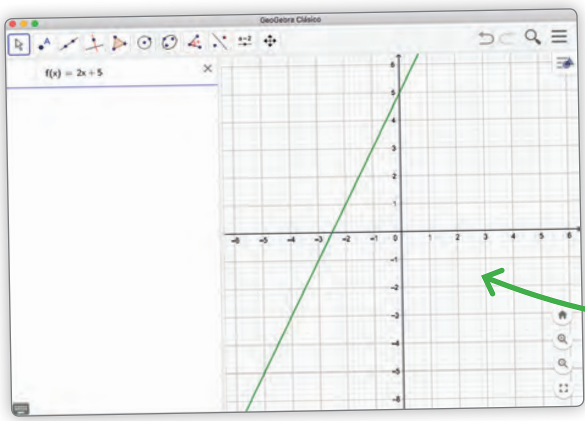
Herramientas tecnológicas

Para representar la gráfica de una función lineal o afín se puede utilizar el programa GeoGebra.

1. Descarga el programa en
https://www.geogebra.org/download?lang=es

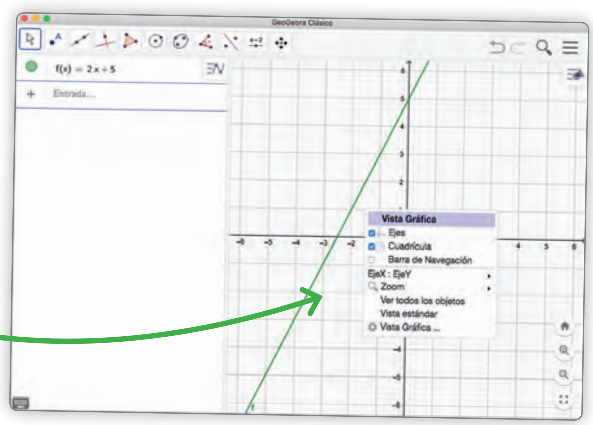
2. Escribe la función lineal o afín que quieras en la sección «Entrada», ubicada en la parte inferior de la ventana. Por ejemplo $f(x) = 2x + 5$.

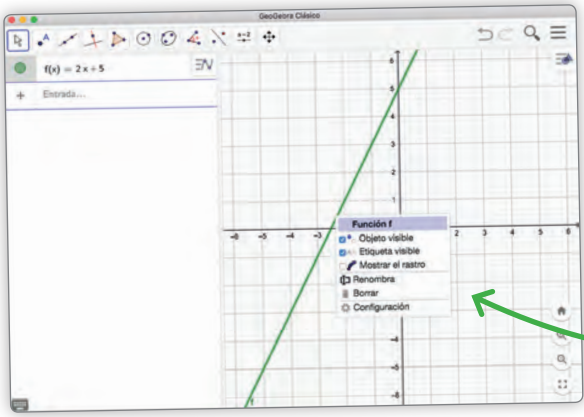




3. Una vez ingresada, presiona *Enter* y observa la gráfica que aparece.

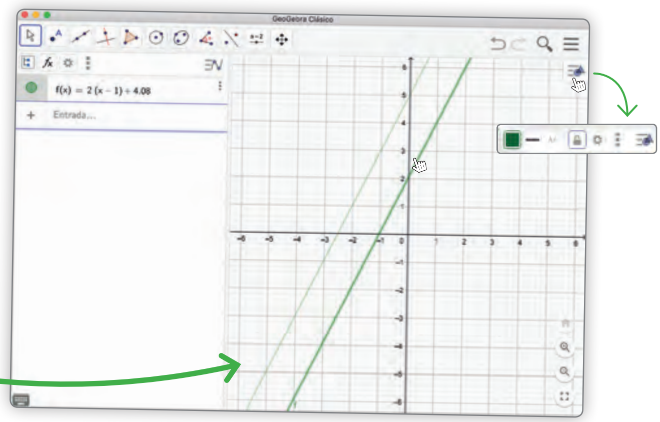
4. Haz clic con el botón derecho del *mouse* sobre el plano cartesiano para acceder a las opciones de apariencia del plano cartesiano, como ejes, cuadriculado, *zoom*, entre otras.





5 Haz clic con el botón derecho del *mouse* sobre la función para acceder a las opciones de apariencia y propiedades del objeto, en este caso, la función.

6 Mueve la gráfica de la función manteniendo presionado el botón derecho o izquierdo del *mouse* sobre la función. Observa que la expresión algebraica de la función cambia según varía la gráfica.



Responde:

1. Utiliza GeoGebra para graficar las siguientes funciones y luego responde.
   a. $f(x) = 2x$ y $g(x) = -2x$.
   b. $f(x) = x$ y $g(x) = 0{,}5x$.
   c. $f(x) = 3x$ y $g(x) = 3x - 1$.
   d. $f(x) = 6x$ y $g(x) = 6x + 5$.

   En cada caso, ¿cuáles son las semejanzas y las diferencias entre sus representaciones gráficas?

2. Representa gráficamente en Geogebra $f(x) = 5$ y luego $v(x) = -3$. ¿Puedes decir que son funciones?, ¿por qué?

Nota: la aplicación GeoGebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

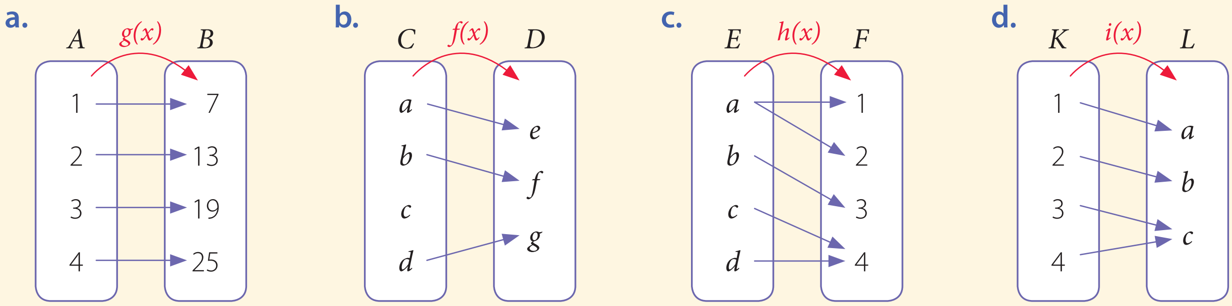
Cuaderno de Actividades
Páginas 68 a 71.

Reflexiona y responde

- ¿Cuáles son las diferencias entre una función afín y una función lineal?
- ¿Cuál crees que es una ventaja de usar herramientas tecnológicas al graficar funciones?
- ¿Qué pasos sigues al graficar las funciones? Ejemplifica.

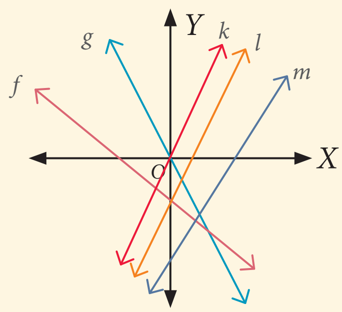
Evaluación Lección 3

1. Identifica en cada caso si los diagramas representan una función. Justifica tu respuesta.



2. Dado el dominio de cada función, determina el recorrido.
   a. $f(x) = -3x$ y $Dom(f) = \{-2, -1, 0, 1\}$
   b. $g(x) = 10x - 3$ y $Dom(g) = \{0, 1, 2, 3\}$

3. Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines y si son crecientes o decrecientes.



4. Determina si los puntos pertenecen a la gráfica de cada función.
   a. $f(x) = -3x$, $A(0, 0)$, $B(1, -3)$, $C(3, 9)$, $D(-2, 10)$
   b. $g(x) = x - 6$, $E(1, 5)$, $F(2, -4)$, $G(-1, -7)$, $H(-9, -3)$

5. Determina si las siguientes son funciones lineales o afines. Justifica tu respuesta.
   a. $h(x) = 3x - 33$
   b. $f(x) = \frac{5}{7}x - 22$
   c. $g(x) = -2x$
   d. $j(x) = \frac{3}{4}x$
   e. $l(x) = x - 5{,}5$
   f. $k(x) = 1 - \frac{5}{7}x$

6. Determina, para cada función, el valor de la pendiente y las coordenadas del punto en el que corta al eje Y.
   a. $f(x) = 7x + 1$
   b. $h(x) = -x + 10$
   c. $g(x) = -9x - 2{,}5$
   d. $j(x) = -2x$
   e. $k(x) = -\frac{3}{4}x$
   f. $l(x) = -8$

7. En una florería, por armar un ramo de rosas se cobran \$700 como base y \$900 por cada rosa.
   a. ¿Cuál es el precio del ramo si tiene 10 rosas?
   b. ¿Cuál es la función que relaciona la cantidad de rosas con el precio del ramo?

8. La distancia d, en kilómetros, que recorre un automóvil con una rapidez constante de 60 km/h se puede representar mediante la función d, dada por $d(t) = 60 \cdot t$, donde t es el tiempo de viaje en horas. ¿Cuántos kilómetros recorre el automóvil en cuatro horas? ¿Cuánto tiempo demora en recorrer 120 km?

9. Carlos debe organizar una fiesta para los trabajadores de la compañía en que trabaja y cuenta con los datos de dos empresas de eventos. Cada empresa tiene diferentes tarifas, presentadas en la tabla, para el arriendo del salón y para el menú por persona.

Empresa	Salón	Menú
A	\$640 000	\$11 000
B	\$550 000	\$14 000

   a. ¿Qué función modela el total por pagar en la empresa A? ¿Y en la empresa B?
   b. ¿Cuál es el cobro, en ambas empresas, si asisten 25 empleados? ¿Y si asisten 50?
   c. Representa cada función en el plano cartesiano considerando hasta 80 asistentes, recuerda elegir una escala conveniente.
   d. Según las gráficas, ¿cuándo es más conveniente contratar a la empresa B?
   e. Si Carlos contabilizó que irán 45 asistentes, ¿qué empresa le conviene contratar? ¿Por qué?

10. Grafica las siguientes funciones.
   a. $f(x) = x - 1$
   b. $g(x) = 7x$
   c. $h(x) = -\frac{1}{4}x$
   d. $g(x) = -0,5x$
   e. $h(x) = x + 5$
   f. $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$

Cuaderno de Actividades
Páginas 72 y 73.

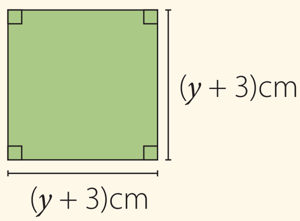
Reflexiona y responde

- ¿Qué errores cometiste al identificar funciones?, ¿qué puedes hacer para no volver a cometerlos?
- ¿Qué más te gustaría saber sobre funciones? Explica.
- ¿Qué semejanzas y diferencias identificas entre una función afín y una función lineal?

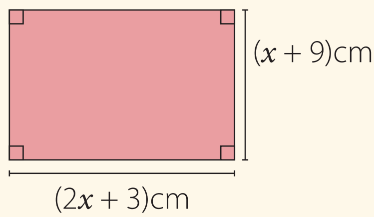
Evaluación final

1. Determina una expresión algebraica (reducida) para representar el perímetro y otra para representar el área de las siguientes figuras.

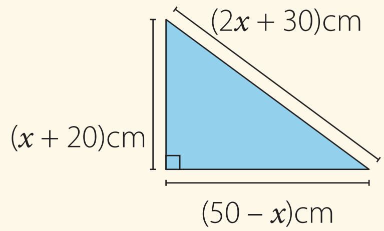
a.



b.



c.



2. Considera las siguientes igualdades y luego calcula.

$A = p + 1$ $\quad$ $B = m - 2$ $\quad$ $C = 2p - m$

a. $A + B$

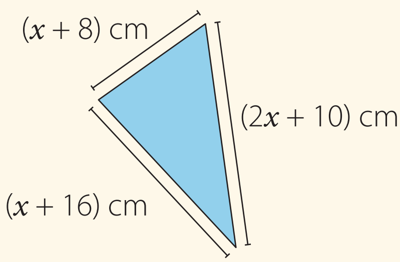
b. $A - C$

c. $B \cdot C$

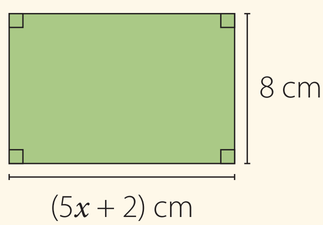
d. $2 \cdot (A - B)$

3. Analiza la información dada y determina el valor de x en cada caso.

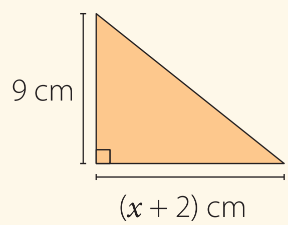
a. El perímetro es 74 cm.



b. El área es 136 cm^2.



c. El área es 48 cm^2.



4. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a. $x + 5 < 25$

b. $3x - \frac{1}{5} > \frac{2}{5}$

c. $2(4x + 1) > -x$

d. $\frac{1}{6} + 2x < \frac{2}{3} + 6x$

5. Modela las siguientes situaciones con una ecuación o inecuación. Luego resuelve el problema.

a. La medida del largo de un rectángulo es cuatro veces la de su ancho y su perímetro es 120 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

b. La tercera parte de un número entero, disminuido en 6, es mayor que 22. Si el número es menor que 88, ¿qué números cumplen con esta condición?

c. La cantidad de horas (h) que debe dormir una persona joven de n años se puede calcular con la expresión: $h = 8 + \frac{1}{2}(18 - n)$. Según lo anterior, ¿cuántas horas debe dormir un recién nacido?, ¿y una persona de 18 años?

6. Calcula el valor solicitado en cada caso. Sean $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = -x + 5$.

a. $f(-1)$

b. $g(-2)$

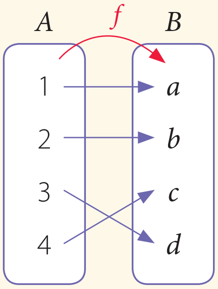
c. $2 \cdot g(-0{,}5)$

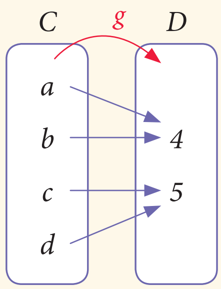
d. $f(-2) - 4 \cdot g(1)$

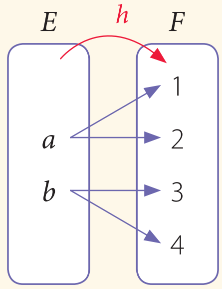
e. $g(-1) + 2 \cdot f(3)$

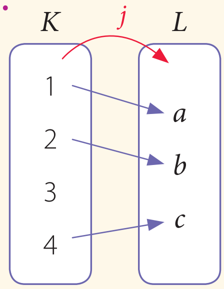
f. $2 \cdot (3 \cdot f(-2) - g(2))$

7. Identifica en cada caso si los diagramas representan una función. Luego justifica.

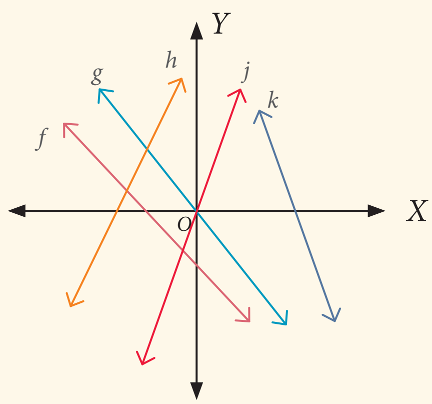
a.


b.


c.


d.


8. Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines y si son crecientes o decrecientes.



9. Representa gráficamente las siguientes funciones.

a. $f(x) = 0{,}5x - 0{,}5$

b. $f(x) = -1{,}5x$

10. La función f asocia a cada número entero su cuarta parte más 5 unidades. ¿Cuál es su expresión algebraica?, ¿cuál es el valor de $f(2)$ y $f(0)$?

Cuaderno de Actividades
Páginas 74 y 75.

Reflexiona y responde

- ¿Qué contenido crees que debes repasar? ¿Por qué?
- ¿Cómo resolviste las dificultades que tuviste en el desarrollo de la unidad?
- ¿Crees que podrías haber aprendido si no te hubieras esforzado? Comenta con tu curso.

Síntesis y Repaso

Lección 1 Expresiones algebraicas

Para sumar o restar expresiones algebraicas se asocian los términos semejantes y luego se suman o se restan sus coeficientes numéricos y se conserva el factor literal.

Ejemplo:

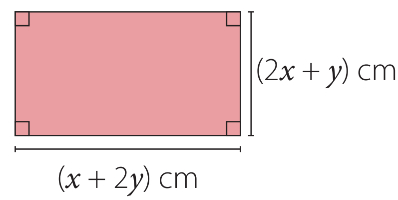
$8c - (m - 2c) = 8c - m + 2c = 10c - m$

En la multiplicación de expresiones algebraicas se pueden utilizar propiedades de las potencias y la propiedad distributiva.

Ejemplos: $6a^3 \cdot 4a^5 = 6 \cdot 4a^{3+5}$
$= 24a^8$

$(a + 4) \cdot (5b + c) = a \cdot (5b + c) + 4 \cdot (5b + c)$
$= 5ab + ac + 20b + 4c$

1. Reduce las siguientes expresiones.
   - a. $3a - b + a + 3b$
   - b. $2p - 5m - (3p + 7m)$
   - c. $-2x - (3y + 9x)$
   - d. $-(3a + 4b) - 5a + 2b$
2. Desarrolla los siguientes productos.
   - a. $2a^3 \cdot 3b$
   - b. $20m \cdot (a + b)$
   - c. $(2 + a) \cdot (a + b)$
   - d. $(d + e) \cdot (f + g)$
3. Determina el área y el perímetro del siguiente rectángulo.



Lección 2 Ecuaciones e inecuaciones

Para resolver una ecuación con coeficientes fraccionarios, se puede calcular el mínimo común múltiplo (mcm) entre los denominadores y multiplicar cada término por dicho número.

Ejemplo: $\frac{1}{6}x + 4 = \frac{1}{2}$

$6 \cdot \frac{1}{6}x + 6 \cdot 4 = 6 \cdot \frac{1}{2}$

$x + 24 = 3$

$x = -21$

Resolver una inecuación es determinar el conjunto de números que satisfacen la desigualdad.

Ejemplo: $2x - 3{,}4 < 6{,}7$

$2x < 10{,}1$

$x < 5{,}05$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   - a. $3x - 4 = 6x + 20$
   - b. $3{,}5x + 4 = 2{,}5x - 5$
   - c. $2(x + 7) = 3(x - 1)$
   - d. $\frac{x}{2} + \frac{7}{4} = \frac{3}{2}$
   - e. $\frac{3x}{10} - \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$
2. Resuelve las siguientes inecuaciones.
   - a. $6x - 3 < 25$
   - b. $4x - 2 < 14x + 10$
   - c. $2(4x + 6) > -4x$
   - d. $\frac{1}{3}x + 6 > 9$
   - e. $5x - \frac{3}{8} < 12$

Lección 3 Funciones

• Una **función** f de A en B (f: A → B) es una relación que asocia cada elemento $\boldsymbol{x}$ del conjunto A (Dominio) con un único elemento $\boldsymbol{y}$ del conjunto B (Recorrido).

Variable dependiente ← $f(x) = 3 \cdot x$ → Variable independiente

Una **función lineal** es de la forma:

$$f(x) = mx$$

Una **función afín** es de la forma:

$$f(x) = mx + c$$

donde **m** es la pendiente y **c** es el coeficiente de posición.

• Una función se puede representar usando diferentes registros:

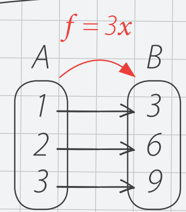
Expresión algebraica

$$f(x) = 3x$$

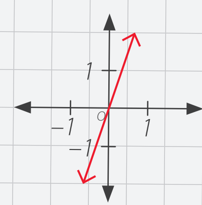
Tabla de valores

x	$f(x)$
1	3
2	6
3	9
4	12

Diagrama sagital



Gráfico



1. **Analiza la información y luego responde.**

a. La función f asocia a cada número entero su mitad más 8 unidades.

- ¿Cuál es su expresión algebraica?
- ¿Es una función lineal o afín?
- ¿Cuál es el valor de $f(2)$ y $f(0)$?

b. La función g asocia a cada número su triple.

- ¿Cuál es su expresión algebraica?
- ¿Es una función lineal o afín?
- ¿Cuál es el valor de $g(3)$ y $g(5)$?

2. **Construye una tabla de valores para cada una de las siguientes funciones y luego grafícalas.**

a. $f(x) = 5x$

b. $f(x) = x - 3$

c. $f(x) = 0{,}5x$

d. $f(x) = \frac{x}{2} + 5$

3 Unidad La geometría del arte

¿Cómo se relaciona la geometría y el arte?

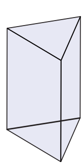
En esta unidad estudiarás el área y el volumen de prismas rectos y de cilindros; el teorema de Pitágoras y las transformaciones isométricas para resolver diversos problemas geométricos y de la vida cotidiana.

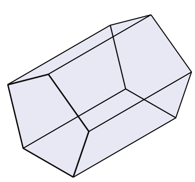
Matemática y Arte han estado siempre estrechamente vinculadas: el número de oro, las simetrías, las proporciones, la geometría, son elementos presentes en el arte; no en vano muchos grandes artistas de la historia han sido grandes matemáticos; se han apoyado en la matemática para expresar la realidad con un lenguaje artístico.

- Enuncia 5 ramas del arte donde la geometría juega un papel fundamental.

Evaluación diagnóstica

1. Calcula:
   a. Si el largo de un rectángulo mide 8 cm y el ancho 2,5 cm menos, ¿cuál es su área?
   b. ¿Cuál es el perímetro (P) de una circunferencia de radio 5 cm? Considera $\pi \approx 3{,}14$.
   c. ¿Cuál es el área (A) de un círculo de radio 11 cm? Considera $\pi \approx 3{,}14$.
2. El perímetro de un triángulo equilátero mide 18 cm y la altura mide 5,2 cm. Calcula el área del triángulo.
3. ¿Cuántas caras tienen los siguientes cuerpos geométricos?





■ *Pirámide del Museo del Louvre.*
Inaugurada el 29 de marzo del año 1989.

Lección 1

Área y volumen de prismas y cilindros

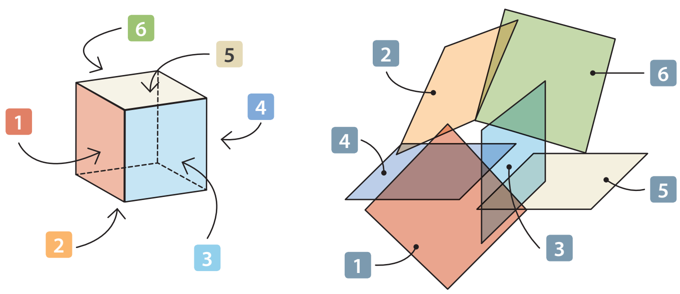
Área de prismas y cilindros

El cubismo es un movimiento artístico que rompe la estructura del arte tradicional.

Surge a principios del siglo XX tras las investigaciones llevadas a cabo por pintores como Pablo Picasso, Georges Braque y Juan Gris, entre otros.

En esta lección podrás descubrir y aplicar las fórmulas del área de superficies y del volumen de prismas rectos y de cilindros.

■ *Guitarra y mandolina.* Juan Gris. Madrid 1919.



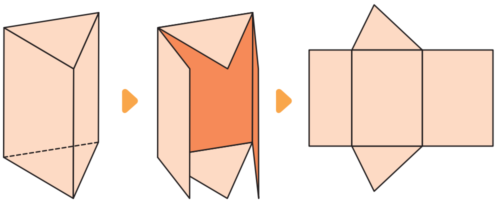
De un cubo 3D se pueden ver a lo más 3 de sus lados. Sin embargo, 4-dimensional se podrían ver sus 6 lados a la vez.

Lo que hicieron los cubistas fue deconstruir el cubo 3D en sus 6 facetas. Luego pintar las facetas en un lienzo 2D. Ahora podríamos "ver el cubo" como si fuéramos de la cuarta dimensión.

- Utiliza la técnica del cubismo para deconstruir un prisma y luego crea tu propia obra de arte.

Ejemplo 1

Tamara tiene una caja en la que guarda sus útiles escolares. Ella quiere forrarla con papel. Para ello, desarma la caja, como se muestra en la siguiente imagen.

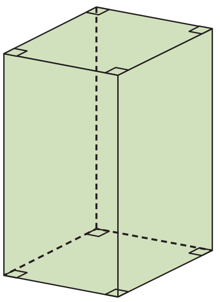


¿Cómo podría saber Tamara cuánto papel requiere para forrar la caja?

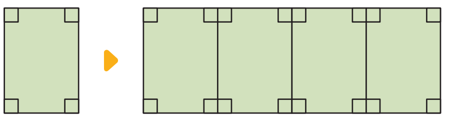
Para saber cuánto papel utilizará, Tamara desarma la caja obteniendo una red formada por 2 triángulos y tres rectángulos. Entonces, si calcula el área de cada una de estas figuras y las suma, tendrá el área total, y podrá dar respuesta a su interrogante.

Ejemplo 2

Dibuja la red geométrica del siguiente prisma recto de base cuadrada.

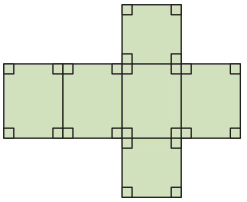


1. Dibujamos la figura geométrica que corresponde a sus caras basales.
2. Del mismo modo que en 1, identificamos la figura geométrica que corresponde a cada una de sus caras laterales. Luego, las dibujamos.



Las caras laterales del prisma recto son rectángulos congruentes entre sí.

3. Por último, dibujamos la red geométrica completa con sus dos caras basales y sus 4 caras laterales.



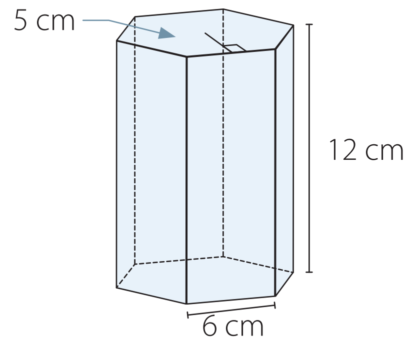
Distintos cuerpos geométricos se pueden construir a partir de figuras en el plano denominadas red geométrica o red de construcción.

Aprende

- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos y pueden ser regulares (cuando todas sus caras son polígonos regulares y congruentes entre sí) o no regulares.
- Un **prisma** es un poliedro cuyas caras laterales son paralelógramos y sus caras basales son paralelas y corresponden a polígonos congruentes
- Un **prisma recto** es aquel cuyas caras laterales son rectángulos o cuadrados. La altura de un prisma recto coincide con su arista lateral.

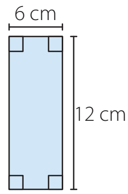
Ejemplo 3

Calcula el área total del siguiente prisma recto de base un hexágono regular.



1. Dibujamos la red geométrica que permite construir el prisma de base hexagonal y la completamos con las medidas del cuerpo geométrico.

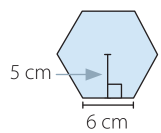
2. Calculamos el área (A) de una de sus caras laterales y de una de sus caras basales.



$A = (12 \cdot 6)\ \text{cm}^2$

$A = 72\ \text{cm}^2$

Área cara lateral.



$A = \dfrac{36 \cdot 5}{2}\ \text{cm}^2 = 90\ \text{cm}^2$

Área cara basal

3. Calcular el área total (A_T) del prisma equivale a sumar el área lateral (A_L) con el área de las caras basales (A_B).

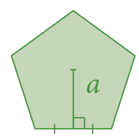
$$A_L = \underbrace{(72 \cdot 6)}_{\text{6 veces el área de una cara lateral, ya que el prisma tiene 6 caras laterales de iguales dimensiones.}}\ \text{cm}^2 = 432\ \text{cm}^2 \qquad A_B = 90\ \text{cm}^2$$

Luego, reemplazamos los valores en la fórmula, con lo que obtenemos:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

$$A_T = (432 + 2 \cdot 90)\ \text{cm}^2 = 612\ \text{cm}^2$$

- El área (A) de un polígono regular está dada por:

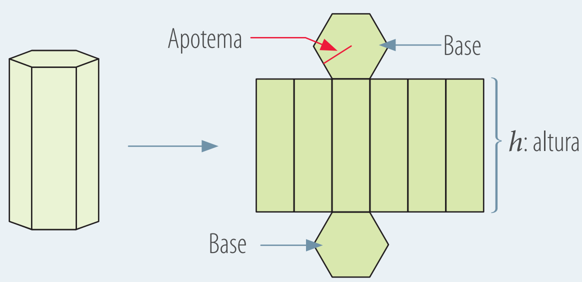


$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

- donde P representa el perímetro del polígono y a es la medida de la apotema.

Aprende

Para calcular el área total (A_T) de un prisma se suman el área lateral (A_L) con el área de las caras basales (A_B).



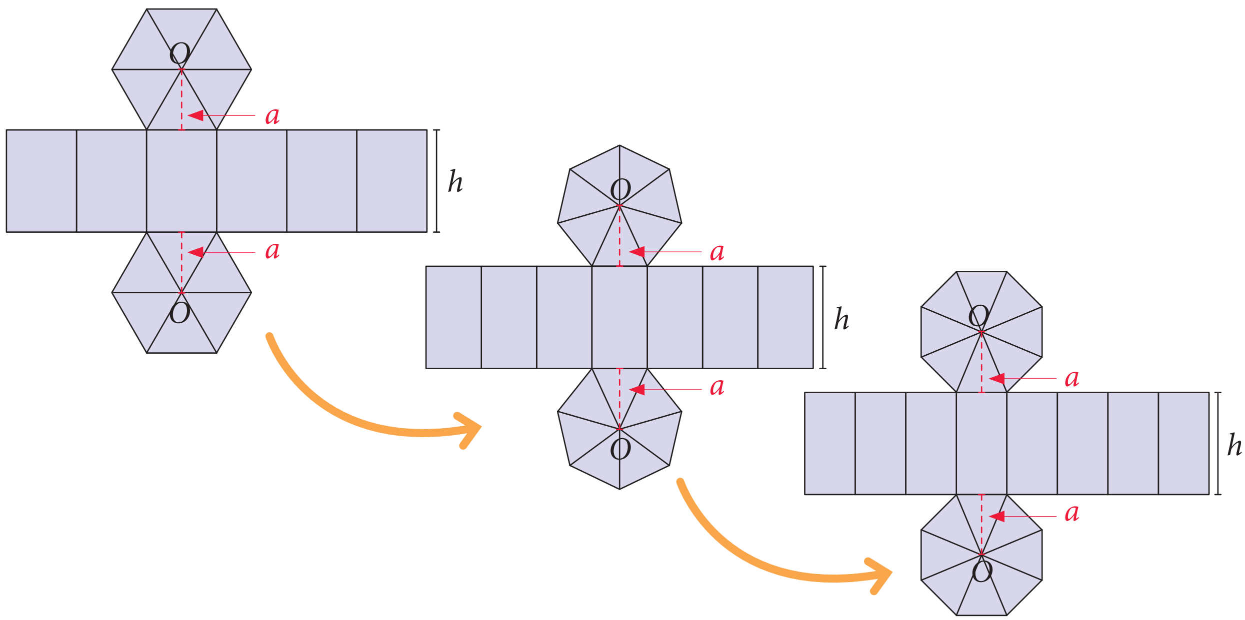
- $A_L = P_B \cdot h$, donde P_B es el perímetro de la base del prisma y h la altura.
- A_B = área del polígono de la base del prisma.

Área total (A_T) de un prisma: $A_T = A_L + A_B + A_B = A_L + 2 \cdot A_B$

Ejemplo 4

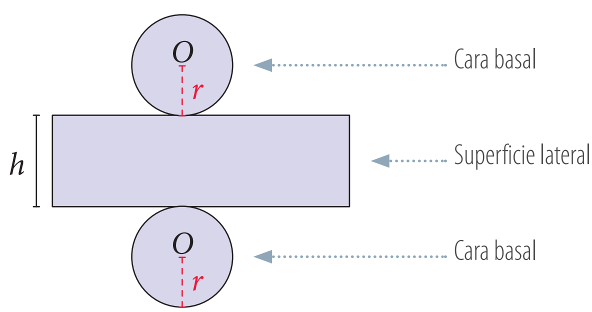
Si se aumenta sucesivamente la cantidad de lados del polígono regular que forma la base de un prisma recto, ¿cuál es la red geométrica del nuevo cuerpo?

1. Construimos la red geométrica del prisma y notamos que al aumentar la cantidad de lados de la base también aumenta la cantidad de caras laterales.



2. Si se sigue con el proceso de aumentar la cantidad de lados de la base del prisma, el polígono regular se asemeja a un círculo. Por lo tanto, la medida de su apotema a se acerca a la medida del radio r del círculo.

3. Al asemejarse la base a un círculo, la red geométrica del cuerpo resultante será la siguiente:

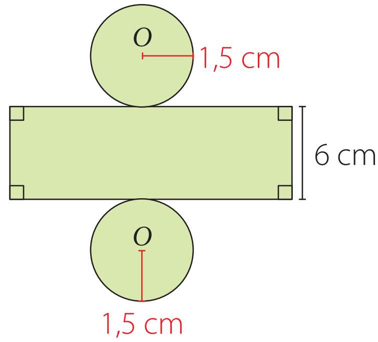


Aprende

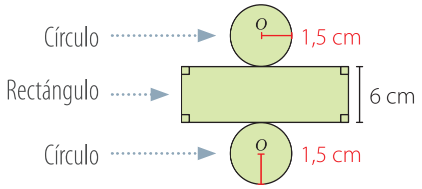
Aquellos cuerpos geométricos que tienen al menos una superficie curva se denominan **cuerpos redondos**, por ejemplo, el cilindro. Para determinar la superficie de un cilindro, calculamos el área de cada una de las figuras que componen su red geométrica.

Ejemplo 5

Calcula el área total del cuerpo geométrico correspondiente a la siguiente red.



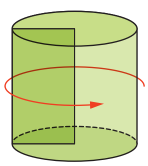
1. Identificamos las figuras que forman la red geométrica.



2. Calculamos el área de la base del cuerpo geométrico considerando que el radio (r) de cada círculo mide 1,5 cm y aproximamos π a 3,14.

$$A_B = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 = 3{,}14 \cdot 2{,}25 = 7{,}065 \text{ cm}^2$$

3. Para calcular el área lateral (A_L), necesitamos la medida del largo del rectángulo, ya que el ancho mide 6 cm. Al construir el cuerpo geométrico, notamos que el largo del rectángulo coincide con el perímetro de la base. Luego, el área lateral (A_L) es igual a:



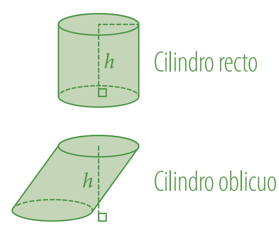
Perímetro de la base

$$A_L = \underbrace{P_B}_{\text{Perímetro de la base}} \cdot 6 = 2\pi r \cdot 6$$
$$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 6$$
$$= 56{,}52 \text{ cm}^2$$

4. Luego, calculamos el área total (A_T) y obtenemos:

$$A_T = A_L + A_B + A_B = (56{,}52 + 7{,}065 + 7{,}065) \text{ cm}^2$$
$$= 70{,}65 \text{ cm}^2$$

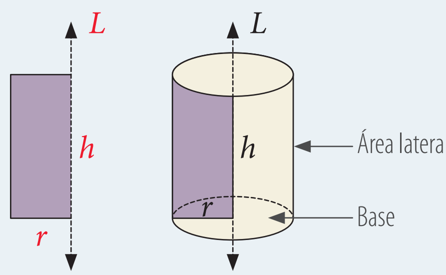
- Un **cilindro** es **recto** cuando su altura h es perpendicular a las caras basales en sus centros, de lo contrario, se dice que es oblicuo.



Aprende

- Un **cilindro recto** es un cuerpo redondo o cuerpo de rotación que se genera a partir de un rectángulo que se hace girar considerando uno de sus lados como eje de rotación.

  h: altura del cilindro r: radio de la base L: eje de rotación

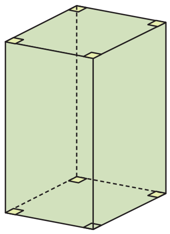


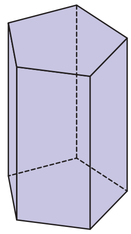
- Para calcular el **área total** (A_T) de un cilindro se suman el área lateral (A_L) con el área de las caras basales (A_B).

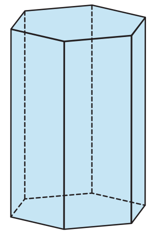
$$A_T = A_L + A_B + A_B = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

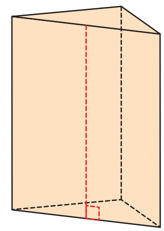
Actividades

1. Construye la red geométrica de cada uno de los prismas.

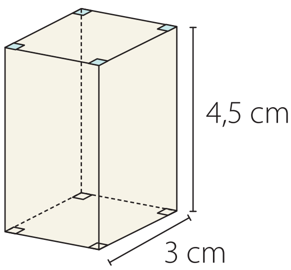
a.


b.


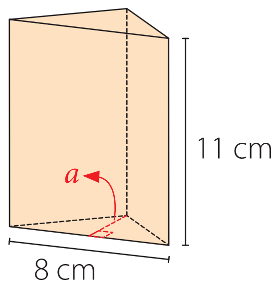
c.


d.


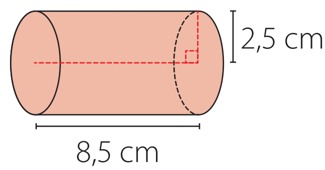
2. Calcula el área basal (A_B), área lateral (A_L) y el área total (A_T) de los siguientes cuerpos geométricos cuya base es un polígono regular. Comprueba con una calculadora.

a.


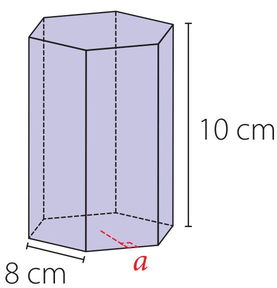
Base cuadrada.

c.


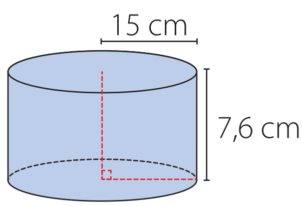
$a = 6{,}9$ cm

e.


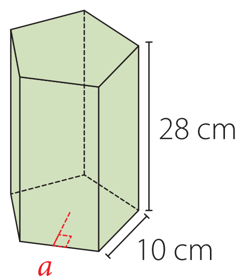
Considera $\pi \approx 3{,}14$

b.


$a = 6{,}9$ cm

d.


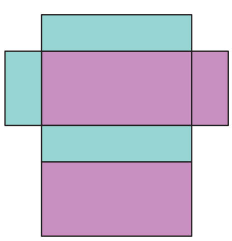
Considera $\pi \approx 3{,}14$

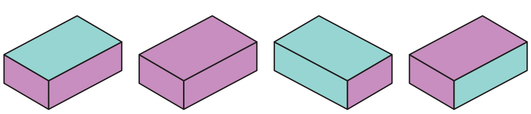
f.


$a = 6{,}8$ cm

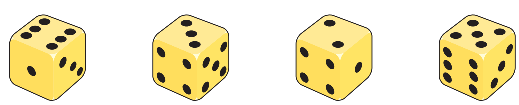
3. Analiza las siguientes redes y cuerpos geométricos y luego realiza lo pedido.

a. Identifica el cuerpo geométrico que se puede construir con la siguiente red.

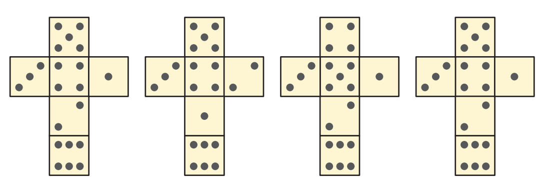




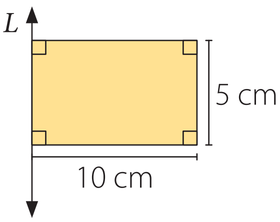
b. Un dado, con forma de cubo, se muestra desde distintas vistas.

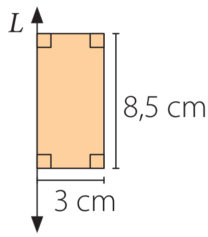


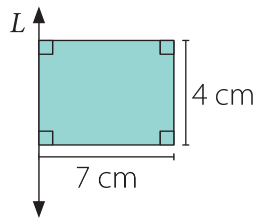
Identifica la red geométrica que permite construir el dado.

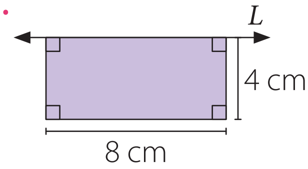


4. **Dibuja los cilindros generados al rotar cada uno de los rectángulos en torno al eje L. Luego, calcula su área total (A_T). Considera $\pi \approx 3{,}14$.**

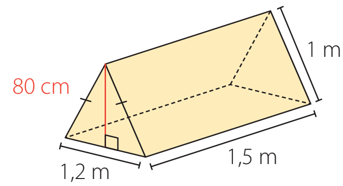
a. 

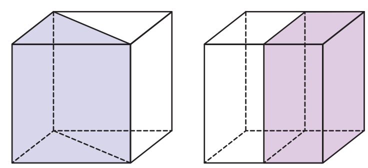
b. 

c. 

d. 

5. **Resuelve los siguientes problemas. Considera $\pi \approx 3{,}14$.**





a. Una carpa tiene las medidas que muestra la imagen. ¿Cuánta tela se utilizó en su fabricación?

b. Un cubo de arista igual a 4 cm se puede dividir por la mitad de dos formas, como muestra la imagen. ¿A qué cuerpo geométrico corresponden las mitades con mayor área?

c. El diámetro de la base de un cilindro mide 7 cm y la altura, 9 cm. ¿Cuánto miden el ancho y el largo del rectángulo que lo generó?

d. ¿Cuál es el área de un tronco de madera cilíndrico recto de 2 m de altura y diámetro basal de 46 cm?

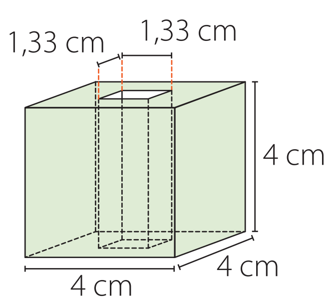
e. ¿Cuántos centímetros cuadrados de material se utiliza, como mínimo, para construir una lata de duraznos en conserva que tiene base circular de 5 cm de radio y una altura de 12 cm?

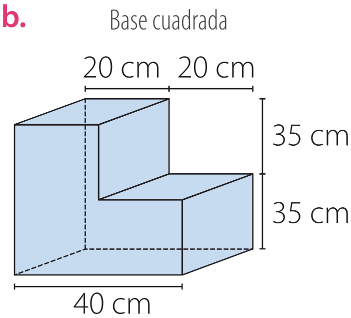
f. Una lata de salsa de tomates tiene 12 cm de altura y 3,5 cm de radio. ¿Cuántos metros cuadrados de papel se necesitan para fabricar las etiquetas de 3 000 latas de tomates?

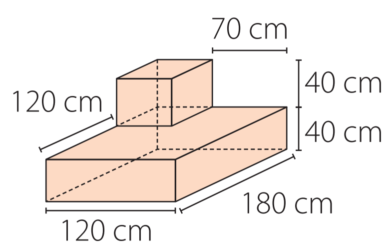
g. Una moneda mide 26 mm de diámetro y 1 mm de alto. ¿Cuál es el área mínima del papel que se utiliza para envolver 50 monedas iguales apiladas?

h. Si las medidas de un prisma de base rectangular se reducen a la mitad, ¿en cuánto disminuye su área total?

6. **Calcula el área total (A_T) de los siguientes cuerpos. Para ello, calcula el área de cada cara y luego súmalas. Compara tus resultados con los de tus compañeros.**

a. 

b. 

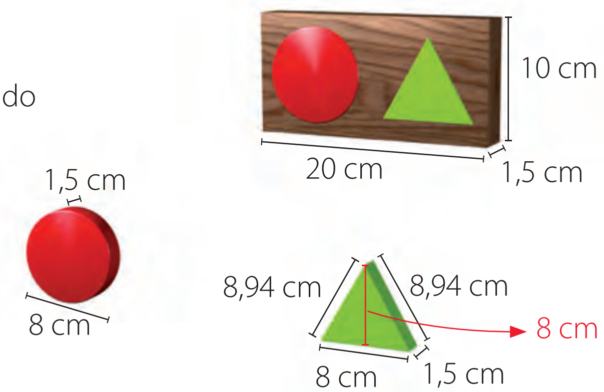
c. 

7. **Analiza la siguiente situación y luego responde.**

Un juego está formado por un soporte con forma de prisma recto de base rectangular en el que se encajan dos piezas, una con forma de cilindro y la otra con forma de prisma de base triangular, como muestra la imagen.

a. ¿Cuál es el área total (A_T) del soporte cuando las piezas están encajadas en él?

b. ¿Cuál es el área total (A_T) de las piezas del juego? Considera $\pi \approx 3,14$.

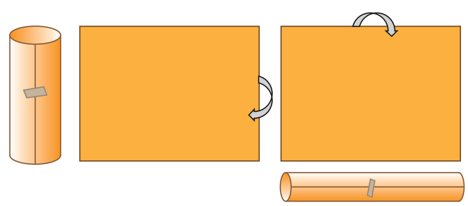


8. **En las plantas para almacenar hidrocarburos (compuesto químico formado por carbono e hidrógeno) existen grandes depósitos de forma cilíndrica.**

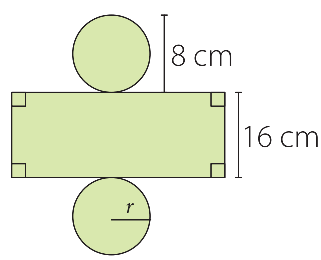
a. ¿Cuál es el área lateral (A_L) que tiene un depósito de 6 m de radio y 10 m de altura? Considera $\pi \approx 3,14$.

b. ¿De qué área se dispone para colocar letreros de advertencia en la superficie lateral de un tanque si puede utilizarse el 12 % del área lateral del cilindro?

9. **Reúnete con un compañero o compañera y desarrollen la siguiente actividad. Consigan dos hojas de papel de forma rectangular y del mismo tamaño. Enrollen una de ellas a lo largo, y la otra, a lo ancho, como muestra la imagen. ¿Cuál de los dos rollos de papel tiene mayor área lateral (A_L)? Explica.**



10. **Josefina dice que en la siguiente red geométrica la medida del largo del rectángulo es 24 cm. ¿Es correcto lo que afirma? ¿Por qué? Si se duplica la altura del cilindro correspondiente a la red geométrica y se mantiene el diámetro de la base, ¿se duplica el área lateral? ¿Ocurre lo mismo si se duplica el diámetro y se mantiene la altura? Considera $\pi \approx 3,14$.**



Cuaderno de Actividades
Páginas 76 a 79.

Reflexiona y responde

- Explica cómo calcular el área de prismas y cilindros a partir de sus redes geométricas y aplicando las fórmulas.
- ¿Cómo planificaste tu trabajo y los procedimientos que utilizaste? Comenta con tu curso.

Volumen de prismas y cilindros

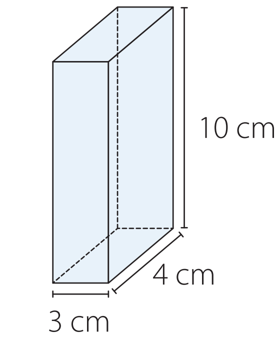
En marzo de 1973 fue publicado el octavo álbum de la banda británica *Pink Floyd*, el cual es reconocido no solo por su alta calidad musical, también por tener una de las carátulas más icónicas de la historia.

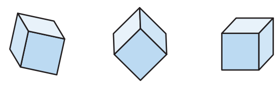
Su portada es la sencilla imagen de un prisma que refracta la luz en los colores del arcoíris.

- ¿Qué crees fue lo que motivó a la banda a utilizar un prisma en su disco?
- ¿Cuáles son las características de un prisma?

Ejemplo 1

Se quieren guardar de forma ordenada cubos de arista igual a 1 cm en la caja que se muestra en la imagen, es decir, que no queden espacios entre ellos.





¿Cuántos cubos caben como máximo en la caja?

1. Como el ancho del prisma mide 3 cm entonces se pueden poner 3 cubos de 1 cm, como de largo mide 4 cm podemos poner 4 cubos de 1 cm.

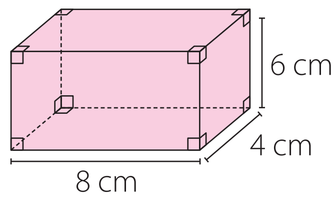
   Por lo tanto, en la base caben 12 cubos.

2. Como el prisma tiene 10 cm de altura, se pueden poner 10 bases como las anteriores de 12 cubos.

   Por lo que, en el prisma caben 120 cubos como máximo.

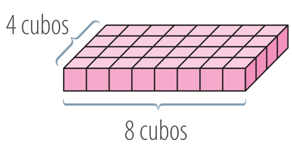
Ejemplo 2

Calcula el volumen del siguiente prisma recto de base rectangular.



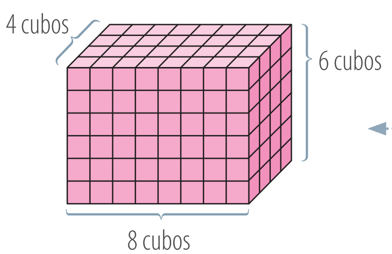
1. El volumen del prisma se puede relacionar con la cantidad de cubos de 1 cm de arista que se necesitan para formar un cuerpo con sus dimensiones.

2. A partir de las medidas de la base del prisma podemos disponer los cubos de la siguiente forma:



Para formar la base del prisma se necesitan (8 • 4) cubos.

3. Luego, como la arista de cada cubo mide 1 cm, necesitamos 6 de los pisos construidos en el paso anterior para formar el prisma.

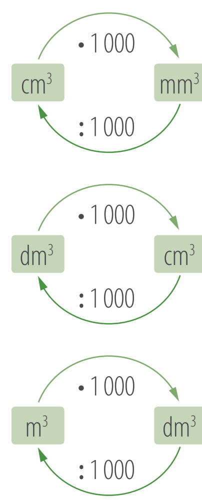


Cada cubo ocupa un espacio de 1 cm^3.

Cada piso tiene (8 • 4) cubos, luego se requieren (6 • 8 • 4) cubos para formar el prisma. Entonces, el volumen del prisma es:

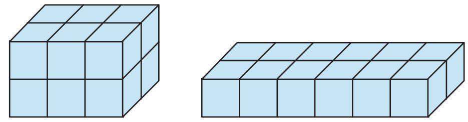
$$(6 \cdot 8 \cdot 4)\ cm^3 = 192\ cm^3$$

- Las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1 000 en 1 000, como se muestra en los siguientes diagramas.

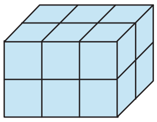
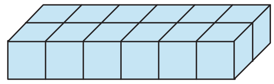


Ejemplo 3

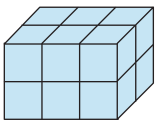
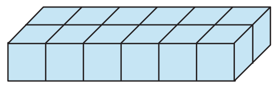
Si la arista de los cubos que forman los siguientes prismas mide 1 cm, ¿cuál de ellos tiene mayor volumen?



1. Contamos la cantidad de cubos que se requieren para formar cada prisma.

 12 cubos  12 cubos

2. Cada cubo ocupa un espacio de 1 cm^3, por lo tanto calculamos el volumen de cada prisma para luego compararlos.

 12 cm^3  12 cm^3

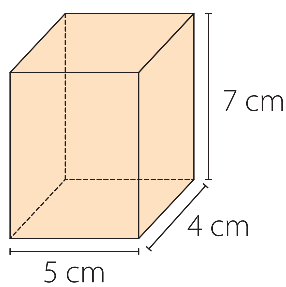
3. Ambos prismas ocupan el mismo espacio, por lo tanto tienen el mismo volumen.

Aprende

El **volumen** es la porción de espacio que ocupa un cuerpo. Un cubo de 1 cm de arista tiene un volumen igual a 1 cm^3 (un centímetro cúbico).

Ejemplo 4

Calcula el volumen del siguiente prisma recto de base rectangular.



1. La base del prisma corresponde a un rectángulo cuyos lados miden 5 cm y 4 cm y su altura (h) es 7 cm.
2. El área basal (A_b) del prisma corresponde a:

$$A_b = (5 \cdot 4)\ cm^2 = 20\ cm^2.$$

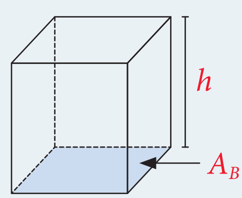
3. Finalmente el volumen (V) del prisma es:

$$V = A_b \cdot h = (20 \cdot 7)\ cm^3 = 140\ cm^3.$$

Aprende

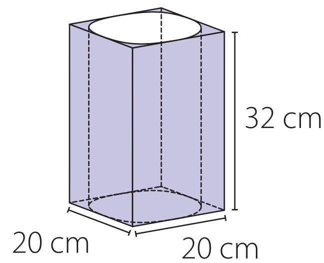
El **volumen** *(V)* **de un prisma** se puede determinar calculando el producto del área basal (A_B) por la medida de su altura (h).

$$V = A_B \cdot h$$



Ejemplo 5

Un recipiente está conformado por un prisma recto de base cuadrada que contiene un cilindro, como se muestra en la figura.



- ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro?

  El cilindro tiene como diámetro 20 cm. Por lo tanto su radio es 10 cm. Y la altura del cilindro es la misma que la del prisma. Es decir, 32 cm.

- ¿Cuál es el volumen del prisma?

  El volumen del prisma se calcula $A_b \cdot h$. Y como, el área de la base del prisma es 400 cm^3 y la altura es 32 cm, el volumen es de 12 800 cm^3.

- ¿La capacidad del cilindro será mayor o menor que la del prisma?

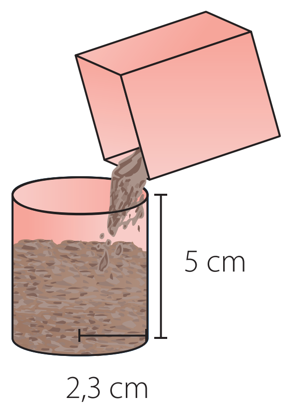
  La capacidad del cilindro es menor que la del prisma, pues la medida de la base del cilindro es menor que la del prisma.

Aprende

El **volumen de un cilindro** se asemejará cada vez más al volumen de un prisma recto de base un polígono regular a medida que la cantidad de lados de la base del prisma aumenta.

Ejemplo 6

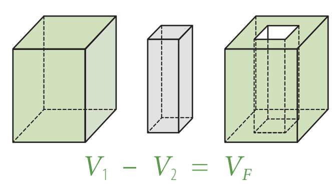
Si se llena al ras un prisma de base cuadrada con arena y se vacía todo el contenido en un cilindro de la misma altura y cuya área de la base es igual a la del prisma, ¿cuánta arena puede contener el cilindro?



1. La cantidad de arena que contiene el prisma es igual al producto entre su área basal y su altura, pues este se encuentra completamente lleno con arena.
2. Notamos que el cilindro se llenará completamente con la arena, ya que tiene igual área basal y altura que el prisma, por lo tanto su volumen es igual al del prisma.
3. Calculamos el volumen (V) del cilindro utilizando la expresión que permite determinar el volumen de un prisma. Consideramos $\pi \approx 3{,}14$.

$$V = \underbrace{A_B}_{\text{Área de la base del cilindro.}} \cdot \overbrace{h}^{\text{Altura del cilindro.}} = \pi r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot (2{,}3)^2 \cdot 5 \text{ cm}^3 = \underbrace{83{,}053 \text{ cm}^3}_{\text{Cantidad de arena.}}$$

- Para calcular el volumen (V) entre dos cuerpos geométricos se determina el volumen de cada uno y luego se resta el mayor con el menor volumen.

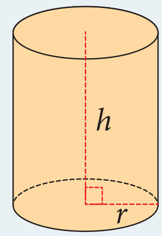


Aprende

El **volumen** *(V)* de un **cilindro** se asemeja al de un prisma. Para calcularlo se determina el área de la base (A_B) y se multiplica por la medida de su altura. Es decir, el volumen (V) de un cilindro está dado por:

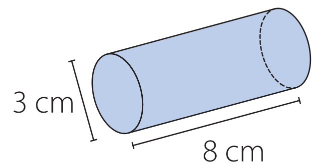
$$V = A_B \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro.

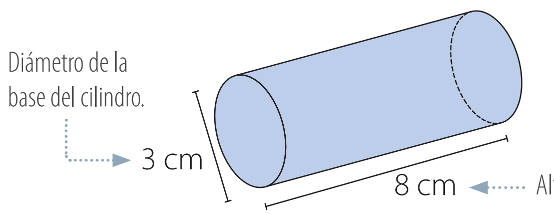


Ejemplo 7

Calcula el volumen del siguiente cilindro.



1. Para calcular el volumen del cilindro podemos utilizar la siguiente expresión: $V = A_B \cdot h$, donde A_B es el área de la base del cilindro y h es su altura.
2. Identificamos el radio de la base del cilindro (r) y su altura (h). Luego, calculamos su volumen (V) considerando $\pi \approx 3{,}14$.

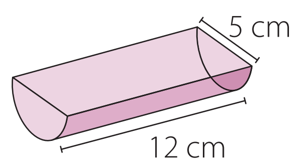


El radio (r) de la base del cilindro mide 3 : 2 = 1,5 cm.

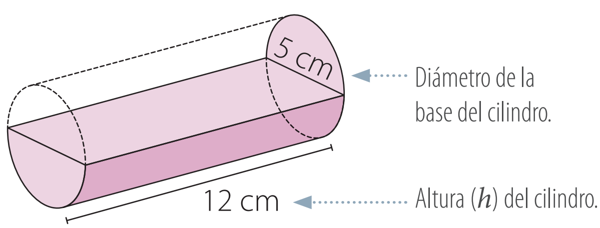
$$V = A_B \cdot h = \pi r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 56{,}52 \text{ cm}^3$$

Ejemplo 8

Calcula el volumen del siguiente cuerpo geométrico considerando que sus caras basales son semicírculos.



1. Notamos que el cuerpo geométrico representa la mitad de un cilindro.
2. Calculamos el volumen (V) del cilindro. Consideramos $\pi \approx 3{,}14$.



$$V = A_B \cdot h$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$
$$V = 3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 \cdot 12 \text{ cm}^3$$
$$V = 235{,}5 \text{ cm}^3$$

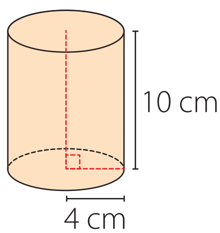
3. Calculamos la mitad del volumen obtenido.

$$V : 2 = (235{,}5 : 2) \text{ cm}^3 = 117{,}75 \text{ cm}^3$$ Volumen del cuerpo geométrico.

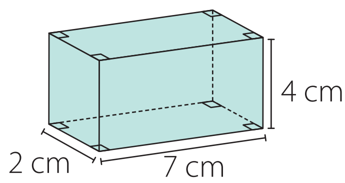
Actividades

1. Calcula el volumen (V) de los siguientes cuerpos geométricos. Considera $\pi \approx 3{,}14$ y comprueba con tu calculadora.

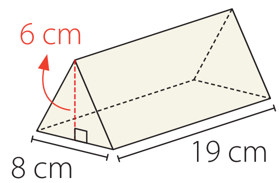
a.



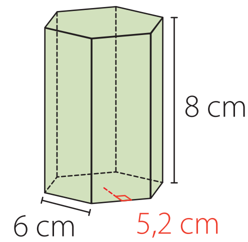
c.



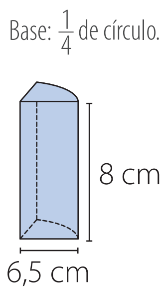
e.



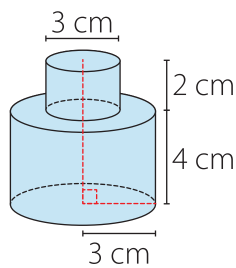
g.



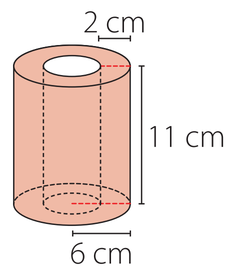
b.



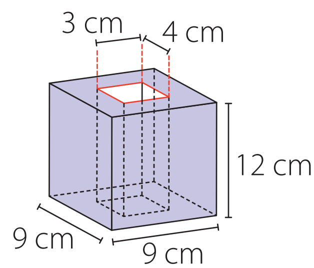
d.



f.

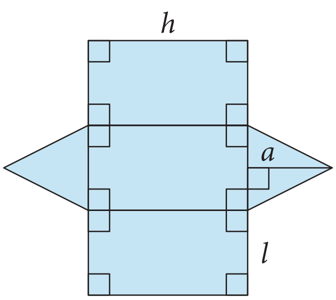


h.

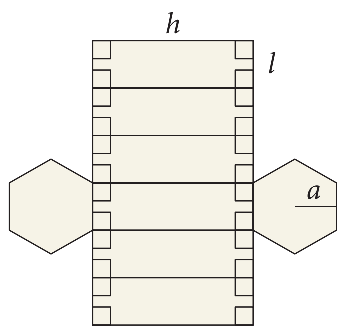


2. Con las siguientes redes geométricas se pueden construir polígonos regulares. Calcula el área de la base (A_B) y el volumen (V) de los respectivos polígonos, sabiendo que:

a. $a = 4{,}3$ cm, $l = 5$ cm y $h = 12$ cm.

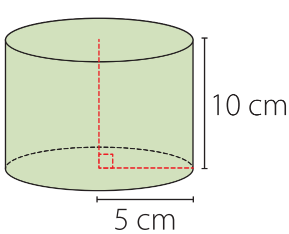


b. $a = 8{,}7$ cm, $l = 10$ cm y $h = 15$ cm.

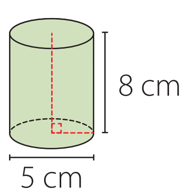


3. Ordena los siguientes cuerpos geométricos desde el de menor al de mayor volumen.

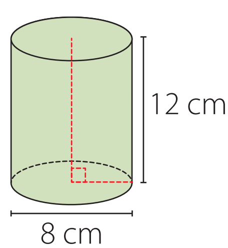
A



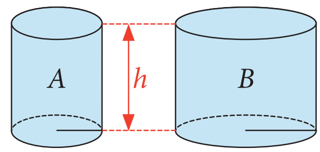
B



C



4. Los depósitos cilíndricos A y B tienen la misma altura, pero la medida del radio de B es el doble de la del radio de A. Si se va a llenar con agua el recipiente B utilizando el A, ¿cuántas veces hay que vaciar el contenido de A en el de B para llenarlo?



5. Considerando $\pi \approx 3{,}14$. Calcula:

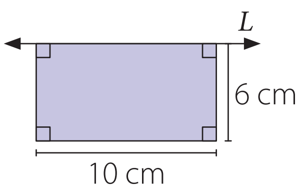
a. El perímetro de la base, el área de la base y el volumen, de un cilindro de radio 5,5 cm y altura 12 cm.

b. El radio, el perímetro de la base y el área de la base de un cilindro de altura 15 cm y volumen 4 710 cm^3.

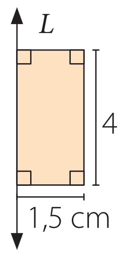
c. El radio, el área de la base y el volumen de un cilindro que tiene un perímetro basal de 12,56 cm y altura 11 cm.

6. Calcula el volumen (V) de los cilindros generados al rotar cada uno de los rectángulos en torno al eje L. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

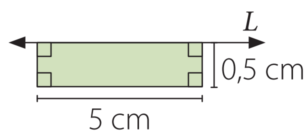
a.



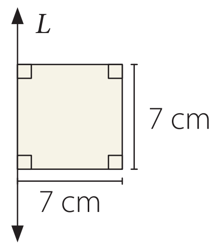
b.



c.



d.



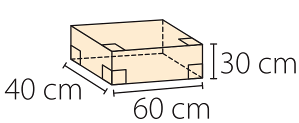
7. Resuelve los siguientes problemas. Considerando $\pi \approx 3{,}14$.

a. Un florero con forma de prisma recto tiene una altura de 25 cm. Su base es un pentágono regular de lado igual a 6 cm y su apotema mide 4,13 cm. ¿Cuántos centímetros cúbicos (cm^3) de agua contiene si se llenó hasta 10 cm del borde?

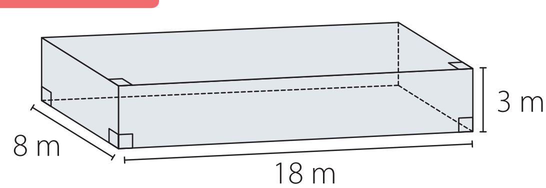
b. Con 72 cubos de 1 cm^3 se forma un prisma recto de caras rectangulares. Si se utilizan 4 cubos para el largo y 6 cubos para el alto, ¿cuántos se necesitan para el ancho?

c. Las dimensiones de un contenedor y de las cajas que se van a almacenar en él se muestran en la imagen. ¿Cuántas cajas se pueden guardar en él de modo que este quede totalmente lleno?

Caja



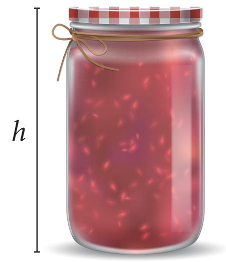
Contenedor



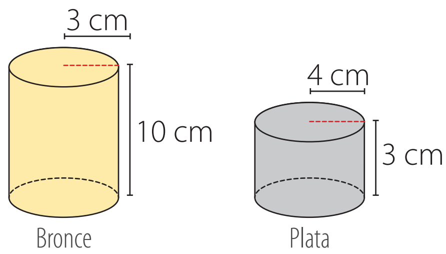
d. Gloria preparó una torta cilíndrica de dos pisos de 8 cm de altura cada uno. El más grande tiene 32 cm de diámetro y el otro, 13 cm de radio. ¿Qué volumen ocupa la torta?

e. La capacidad de una taza con forma cilíndrica es de 254,34 cm^3. Si el diámetro de la base mide 6 cm, ¿cuál es la altura de la taza?

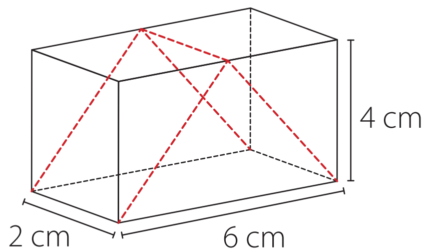
f. En una pastelería venden mermeladas en dos envases distintos. Uno de ellos tiene una altura de 11 cm y el diámetro de su base mide 8 cm, y el otro mide 8 cm de alto y 11 cm de diámetro. ¿Cuál de los dos envases contiene mayor cantidad de mermelada?



g. La densidad (δ) de un material corresponde a la razón entre su masa y su volumen. Si la densidad del bronce (δ_{bronce}) es $8{,}9\,\frac{g}{cm^3}$ y la densidad de la plata (δ_{plata}) es $10{,}46\,\frac{g}{cm^3}$, ¿cuál es la masa de los siguientes cilindros de bronce y de plata? (Considera $\pi \approx 3{,}14$).



h. ¿Es correcto afirmar que el volumen del prisma recto de base triangular es la mitad del volumen del prisma de base rectangular? ¿Por qué? Comenta con tus compañeros.



8. Verifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica en cada caso.

a. Al duplicar la medida de la arista de un cubo, su volumen también se duplica.

b. Si se triplica la altura de un prisma de base rectangular, su volumen también se triplica.

c. Al disminuir a la mitad las medidas de un prisma de base rectangular, su volumen disminuye a la cuarta parte.

d. Al duplicar las medidas de la base de un prisma de base rectangular y al disminuir a la cuarta parte su altura, su volumen no varía.

e. Al duplicar la medida de la altura de un cilindro, su volumen no varía.

f. Si se triplica la medida del radio de un cilindro, su volumen también se triplica.

g. Al disminuir a la mitad las medidas de un cilindro, su volumen disminuye a la octava parte.

h. Al disminuir a la mitad la medida del radio de un cilindro y al cuadruplicar su altura, su volumen no varía.

Cuaderno de Actividades
Páginas 80 a 83.

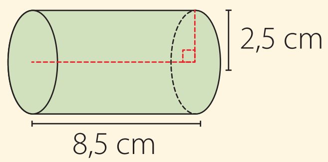
Reflexiona y responde

- ¿Qué situaciones puedes resolver mediante el cálculo de volumen de prismas y cilindros?
- ¿Cómo puedes comprobar si el volumen de prismas o cilindros es correcto?
- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas? ¿Cuáles usaron tus compañeros?

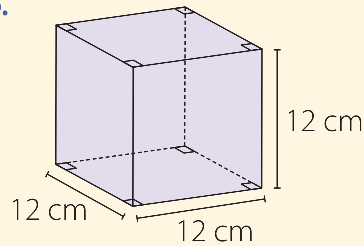
Evaluación Lección 1

1. Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

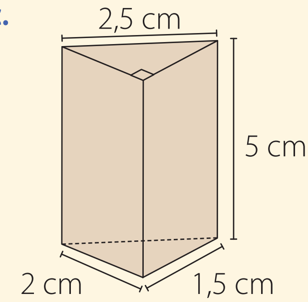
a.



b.

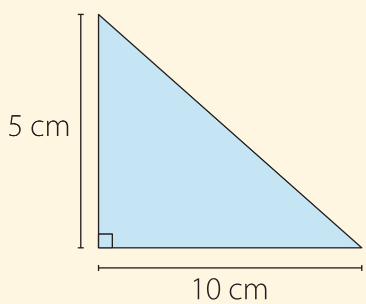


c.

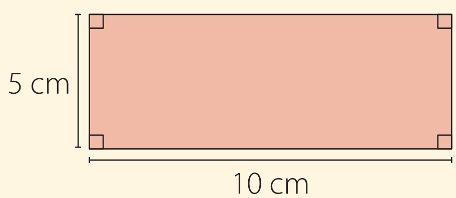


2. Calcula el área y el volumen de los prismas que se describen a continuación. Considera que en cada caso se presenta la vista superior.

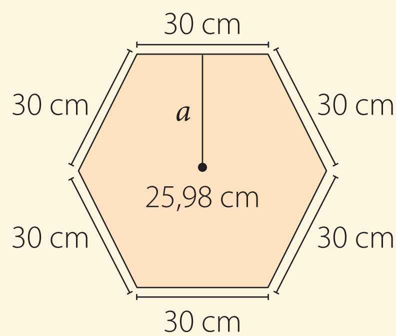
a. Prisma de 12 cm de altura.



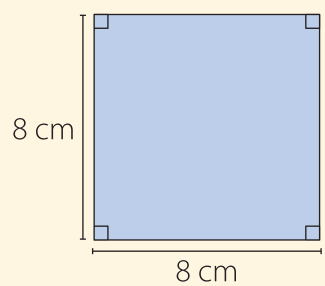
b. Prisma de 9 cm de altura.



c. Prisma de 1,5 m de altura.



d. Prisma de 18 cm de altura.



3. Miguel tiene tres cilindros de 1 m de altura. Calcula sus radios a partir de la información de cada uno de ellos que se entrega a continuación:

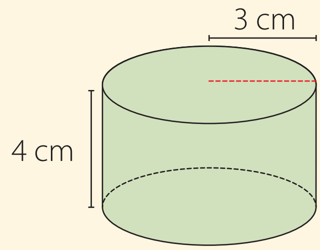
a. Su volumen es 900π.

b. Su área lateral es $1\,600\pi$.

c. Su área basal es 200π.

4. Un diseñador realiza un bosquejo de una caja de 18 cm de altura cuya base es un triángulo rectángulo y sus catetos miden 4 cm y 3 cm. Si no queda conforme con este bosquejo y aumenta al doble la longitud del cateto de menor longitud, ¿cómo debe variar la altura de la caja para conservar su capacidad?

5. Se está diseñando un recipiente para contener la leche extraída en una lechería. Una de las opciones considera un cilindro cuya altura mide 4 m y su radio 3 m, como se muestra en la imagen. Otra opción considera el doble del radio del recipiente anterior. ¿De qué manera debe variar su altura para que en ambos recipientes se pueda guardar la misma cantidad de leche?



6. Sofía quiere recubrir una superficie con el cartón de los rollos de papel higiénico que ha juntado en su casa. Para hacerlo, primero determinó las medidas de uno de estos cilindros, obteniendo los valores de su altura y su diámetro: 10 cm y 5 cm, respectivamente.

a. ¿Qué superficie puede recubrir con 1 rollo?

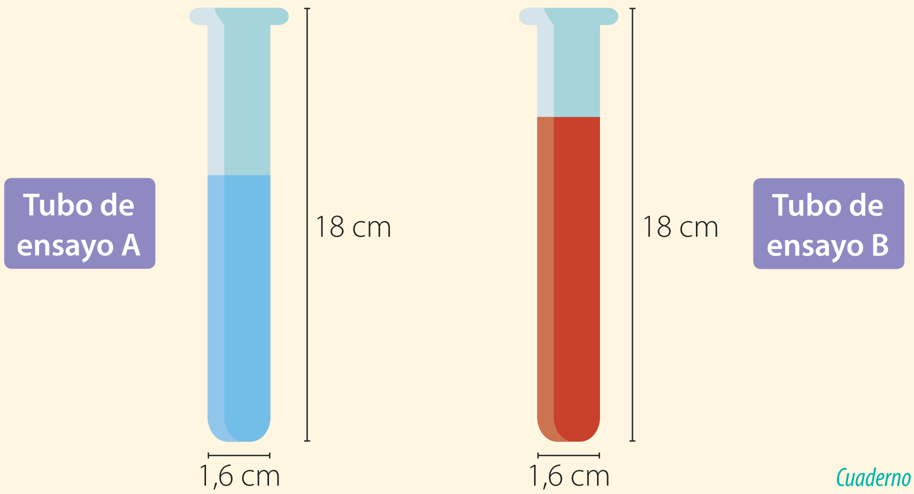
b. ¿Cuántos rollos necesita para recubrir 1 m^2? ¿Cuánto cartón sobra del último rollo ocupado?

7. María tiene dos tubos de ensayo cilíndricos rectos con las siguientes características:

a. ¿Cuánto líquido contiene el **Tubo A** si su nivel marca 10 cm?

b. ¿Cuánto líquido puede contener como máximo el **Tubo B**?

c. ¿Cuál de los tubos puede contener más líquido?



Cuaderno de Actividades
Páginas 84 y 85.

Reflexiona y responde

- ¿En qué situaciones puedes aplicar lo aprendido sobre área y volumen? Ejemplifica.
- ¿Qué pasos sigues para calcular el área y el volumen de prismas y cilindros?
- ¿Cómo puedes verificar el área de prismas y cilindros?, ¿y el volumen?

Lección 2 Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

La **pirámide de Kefrén**, fue la primera gran pirámide que se construyó basándose en el llamado **triángulo sagrado egipcio**, de proporciones 3 - 4 - 5.

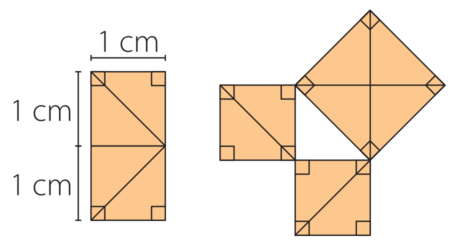
- ¿Cómo crees se relacionan matemáticamente los números del triángulo sagrado?

En esta lección aplicarás el teorema de Pitágoras para resolver diversos problemas geométricos y de la vida cotidiana.

Ejemplo 1

Explica la validez del teorema de Pitágoras.

Según las medidas del siguiente rectángulo, verifica que la suma de las áreas de los cuadrados pequeños es igual al área del cuadrado de mayor tamaño.



1. Notamos que el rectángulo está formado por 4 triángulos congruentes. Calculamos el área (A) del rectángulo:

$$A = (2 \cdot 1)\ \text{cm}^2 = 2\ \text{cm}^2$$

2. El cuadrado de mayor tamaño está formado por 4 triángulos congruentes iguales a los que forman el rectángulo. Por lo tanto, su área es 2 cm^2.

3. Los cuadrados de menor medida están formados por dos triángulos congruentes iguales a los que forman el rectángulo. Luego, el área de cada uno es igual a (2 : 2) cm^2, es decir, 1 cm^2.

4. Sumamos las áreas de los cuadrados de menor tamaño y verificamos que el resultado es igual al área del cuadrado de mayor medida.

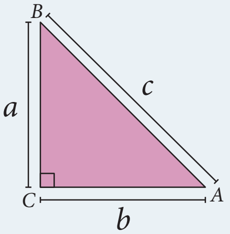
$$\underbrace{1\ \text{cm}^2 + 1\ \text{cm}^2}_{\text{Área cuadrados pequeños.}} = \underbrace{2\ \text{cm}^2}_{\text{Área cuadrado grande.}}$$

Aprende

- En un triángulo rectángulo, el **teorema de Pitágoras** establece que la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

  En el triángulo ABC, a y b representan las medidas de los catetos y c la medida de la hipotenusa.

  Si un trío de números naturales cumple con el teorema de Pitágoras, estos números son llamados **trío pitagórico**.

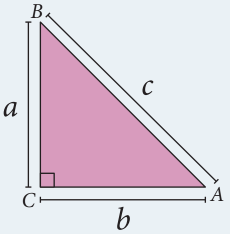


$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

- El **recíproco del teorema de Pitágoras** establece que si se tienen 3 segmentos de medidas a, b y c que cumplen con la igualdad:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

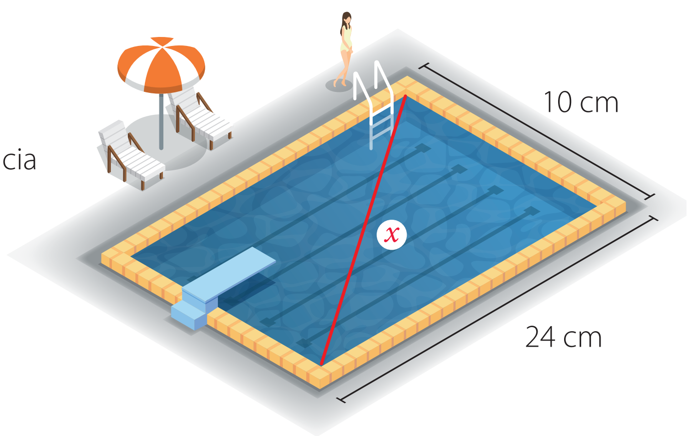
  entonces el triángulo formado por estos segmentos es un triángulo rectángulo.



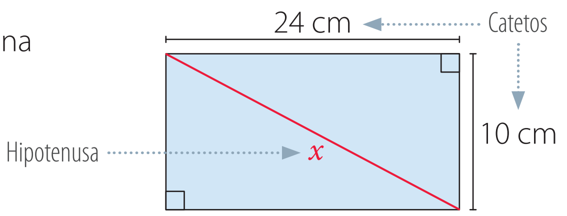
Ejemplo 2

¿Cuál es la distancia máxima que una persona puede nadar en una piscina de forma rectangular que mide 24 m de largo y 10 m de ancho si solo puede hacerlo en línea recta?

1. Si solo puede nadar en línea recta, la distancia máxima (x) corresponde a la diagonal de la superficie de la piscina.



2. Notamos que la diagonal de la piscina determina dos triángulos rectángulos.



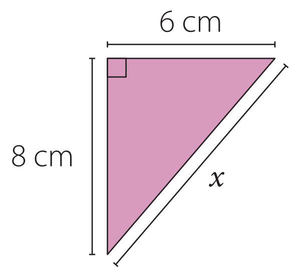
3. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la diagonal (x) de la piscina.

$$x^2 = 24^2 + 10^2$$
$$x^2 = 576 + 100$$
$$x^2 = 676$$
$$x = \sqrt{676} \text{ m}$$
$$x = 26 \text{ m}$$

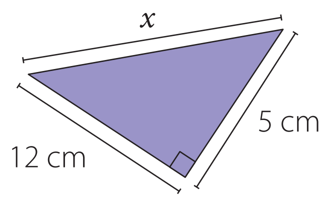
Actividades

1. Calcula la medida del lado desconocido (x) en cada triángulo.

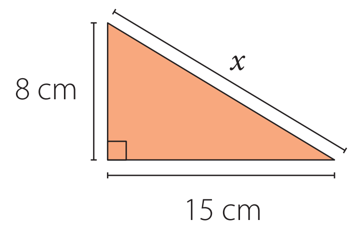
a.



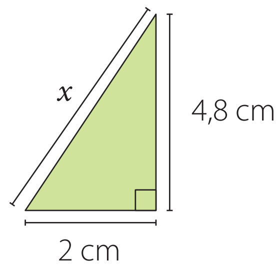
b.



c.

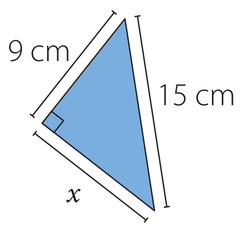


d.

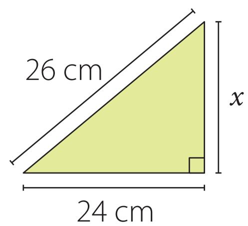


2. Calcula el perímetro (P) y el área (A) de cada triángulo.

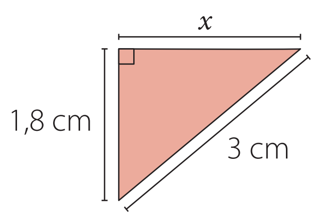
a.



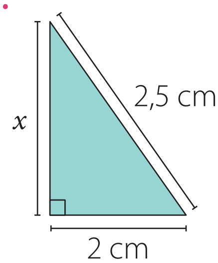
b.



c.

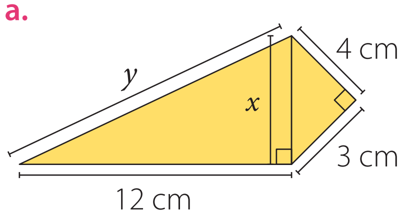


d.

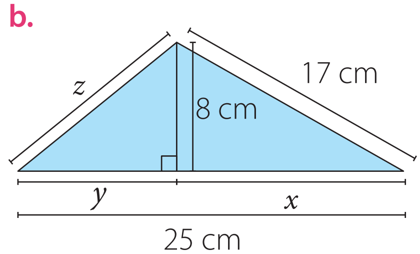


3. Calcula las medidas que faltan en cada figura. Utiliza una calculadora si es necesario.

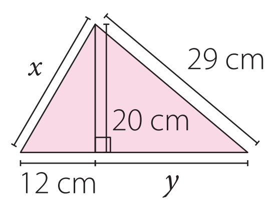
a.



b.



c.

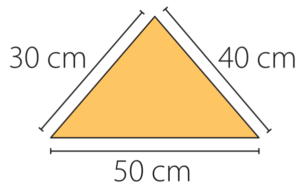


4. Evalúa si los siguientes tríos de números forman tríos pitagóricos. Considera a y b como la medida de los catetos y c como la medida de la hipotenusa.

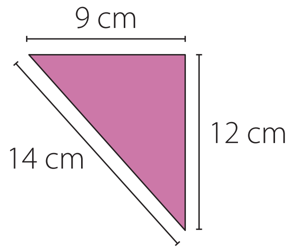
	a.	b.	c.	d.
a	9	5	15	21
b	12	2	36	28
c	15	13	39	35

5. **Identifica los triángulos rectángulos y justifica tu elección.**

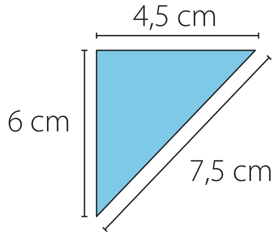
a.



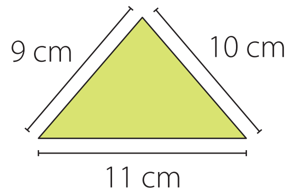
c.



b.

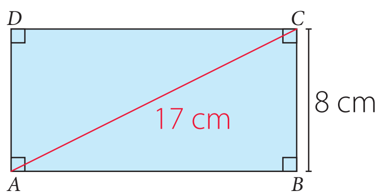


d.

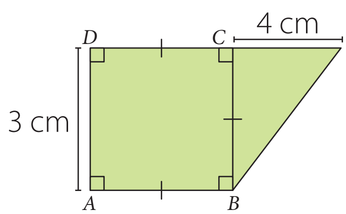


6. **Calcula el perímetro (P) y el área (A) de las siguientes figuras. Si es necesario, utiliza una calculadora.**

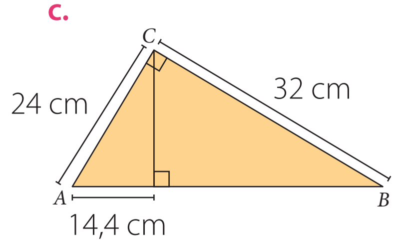
a.



b.



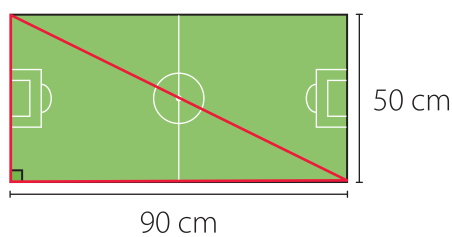
c.



7. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Reúnete con un compañero o compañera y construyan un triángulo rectángulo cuyos lados midan 4,5 cm, 6 cm y 7,5 cm. Sobre cada uno de ellos dibujen un triángulo isósceles con base en el lado y 3 cm de altura. ¿Es cierto que el área del triángulo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos? ¿Por qué?

b. Diego y Francisco trotan en una cancha rectangular como la que se muestra. Diego da 8 vueltas completas a la cancha. Francisco trota solo por el camino marcado con rojo y da 10 vueltas. ¿Quién recorrió una mayor cantidad de metros?



Cuaderno de Actividades
Páginas 86 y 87.

Reflexiona y responde

- ¿Qué pasos sigues al aplicar el teorema de Pitágoras?
- ¿Qué es un trío pitagórico? Ejemplifica.

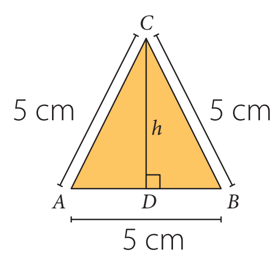
Aplicaciones del teorema de Pitágoras

El **viaducto del Malleco** es un puente ferroviario chileno ubicado sobre el río Malleco, en la ciudad de Collipulli, Región de La Araucanía. Con sus 102 m de altura, es el segundo puente más alto de Chile. En 1990 fue decretado monumento histórico.

- Si un ingeniero quiere cambiar las vigas marcadas por unas más resistentes, ¿qué largo debiesen tener?

Ejemplo 1

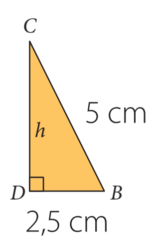
¿Cuál es la medida de la altura h en el triángulo?



1. En un triángulo equilátero y en un triángulo isósceles la altura (h) correspondiente a la base divide a esta en dos segmentos de igual medida. Por lo tanto, se cumple:

$$\overline{AD} = \overline{DB} = 2{,}5 \text{ cm}$$

2. Notamos que la altura h divide al triángulo ABC en dos triángulos rectángulos congruentes. En el triángulo rectángulo DBC, h representa uno de sus catetos, por lo tanto podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular su medida.

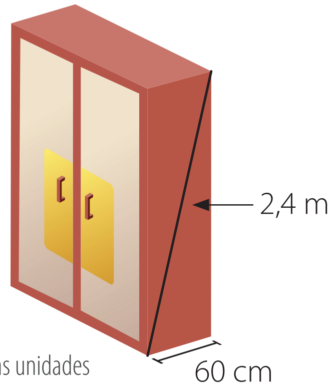


$$\begin{aligned} h^2 + 2{,}5^2 &= 5^2 \\ h^2 + 6{,}25 &= 25 \\ h^2 &= 25 - 6{,}25 \\ h^2 &= 18{,}75 \\ h &= \sqrt{18{,}75} \text{ cm} \approx 4{,}33 \text{ cm} \end{aligned}$$

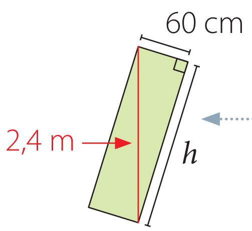
Utilizamos una calculadora para obtener la raíz cuadrada.

Ejemplo 2

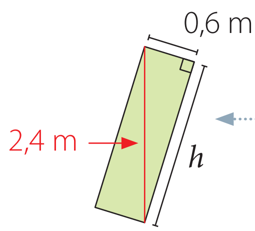
En una habitación de 2,4 m de altura se quiere ubicar un mueble de 60 cm de profundidad. Si se debe inclinar para trasladarlo, ¿cuál es la altura máxima que puede tener para no rayar el techo?



1. En el mueble podemos formar un triángulo rectángulo en el que h representa su altura.



En esta posición la diagonal del mueble coincide con la altura de la habitación.



Igualamos las unidades de medida.

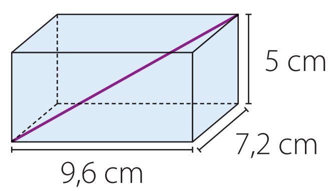
2. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la altura (h).

$$h^2 + 0{,}6^2 = 2{,}4^2$$
$$h^2 + 0{,}36 = 5{,}76$$
$$h^2 = 5{,}4$$
$$h = \sqrt{5{,}4} \approx 2{,}32 \text{ m}$$

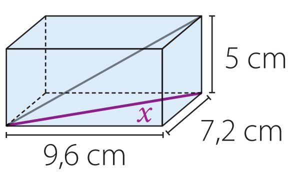
Altura máxima del mueble.

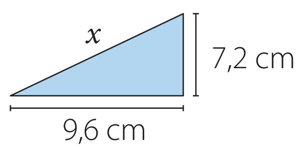
Ejemplo 3

Calcula la medida de la diagonal del siguiente prisma recto de base rectangular.



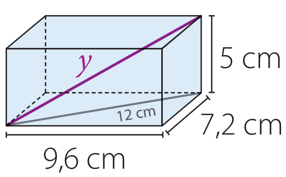
1. Calculamos la medida de la diagonal de la base (x) aplicando el teorema de Pitágoras.

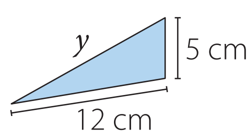




$$x^2 = (7{,}2)^2 + (9{,}6)^2$$
$$x^2 = 51{,}84 + 92{,}16$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \sqrt{144}$$
$$x = 12 \text{ cm}$$

2. Calculamos la medida de la diagonal del prisma (y).





$$y^2 = 5^2 + 12^2$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$y^2 = 25 + 144$$
$$y^2 = 169$$
$$y = \sqrt{169}$$
$$y = 13 \text{ cm}$$

Expresamos la medida de la diagonal del prisma.

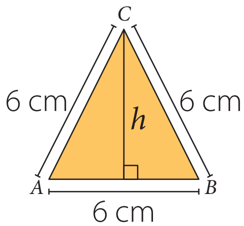
Aprende

El **teorema de Pitágoras** se puede aplicar para calcular las medidas en figuras o cuerpos geométricos, y así poder determinar su área y su perímetro.

Actividades

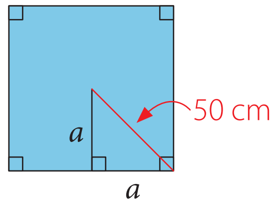
1. Calcula el área (A) de los siguientes polígonos.

a.



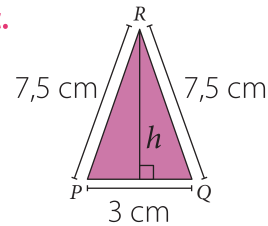
h = altura

b.



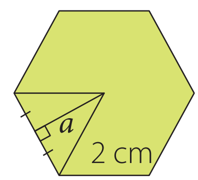
a = apotema

c.



h = altura

d. Hexágono regular



a = apotema

2. Determina lo solicitado en cada caso. Si es necesario, utiliza una calculadora.

a. El área de un rectángulo de largo igual a 6 cm cuya diagonal mide 6,5 cm.

b. El perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 16 cm (Recuerda que en un rombo sus diagonales se dimidian y son perpendiculares).

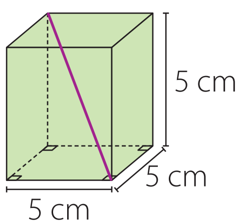
c. El área de un cuadrado de diagonal igual a 8 cm.

d. El perímetro de un triángulo equilátero cuya altura mide 28 cm.

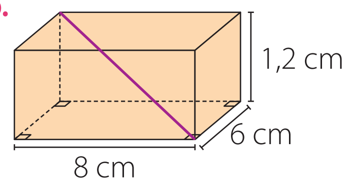
e. La altura de un trapecio isósceles de bases 8 dm y 10 dm de longitud, y lados iguales a 7 dm.

3. Calcula la medida de la diagonal de los siguientes prismas.

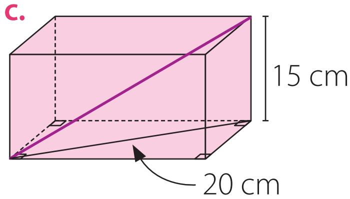
a.



b.

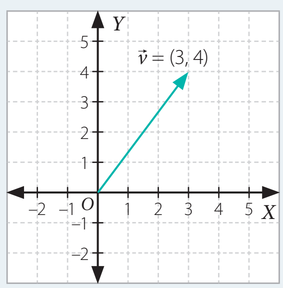


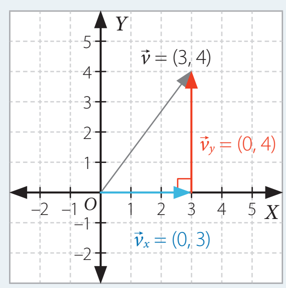
c.



4. Analiza la información y representa las componentes perpendiculares de los siguientes vectores y calcula su magnitud. Si es necesario, utiliza una calculadora.

Al representar un vector $\vec{v}$ en el plano cartesiano es posible representar sus componentes (v_x, v_y) y calcular su magnitud $||v|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Por ejemplo, al representar las componentes del vector $\vec{v} = (3, 4)$ y calcular su magnitud se obtiene:





$$||v|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

a. $\vec{v} = (2, -3)$

b. $\vec{v} = (-6, -4)$

c. $\vec{v} = (-2, 3)$

d. $\vec{v} = (-5, 4)$

e. $\vec{v} = (-4, 4)$

f. $\vec{v} = (3, -4)$

5. **Resuelve los siguientes problemas.**

   a. Una escalera de 3 m está apoyada contra un árbol perpendicular al suelo. Si la distancia de la base de la escalera al árbol es de 1 m, ¿a qué distancia del suelo se encuentra la parte más alta de la escalera?

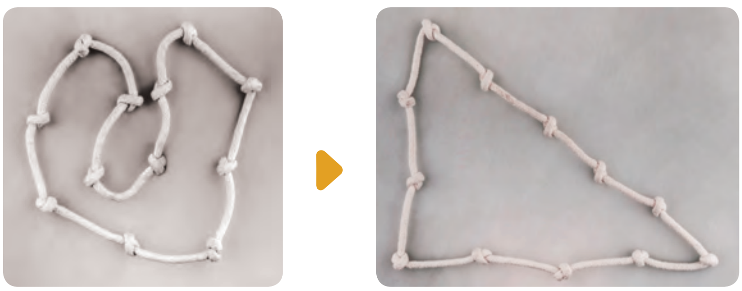
   b. Una rampa tiene una altura de 11 m y su punto de inicio está a 60 m de distancia de la pared. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

   c. Julieta está encumbrando un volantín con un hilo de 100 m. Cuando el hilo está totalmente tenso, la altura del volantín al nivel de su mano es de 80 m. Sin considerar la estatura de Julieta, ¿a qué distancia se encuentra ella de este punto?

   d. En el trapecio $PQRV$ se han trazado las alturas $\overline{PS}$ y $\overline{QT}$. Si $\overline{ST}$ mide 10 cm, $\overline{TV}$ mide 17 cm, $\overline{RV}$ 24 cm y $\overline{PV}$ 13 cm, ¿cuál es el perímetro y cuál es el área del trapecio $PQRV$?

   e. Se necesita pasar un espejo de forma cuadrada, cuyos lados miden 210 cm, por una puerta que mide 84 cm de ancho y 205 cm de alto. ¿Podrá realizarse la operación?

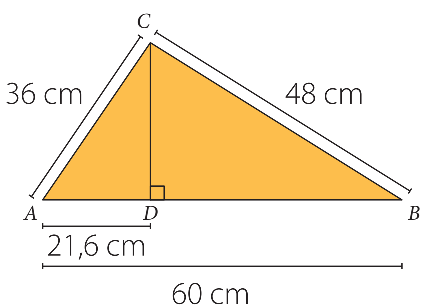
   f. En las construcciones antiguas, para marcar los ángulos rectos desarrollaron un ingenioso método que consistía en una cuerda cerrada que tenía 12 nudos, entre los cuales existía igual distancia. ¿Por qué es posible construir un ángulo recto con esta cuerda? Justifica.



6. **Analiza las siguientes preguntas respecto del triángulo de la figura y luego responde.**

   a. ¿Los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares?

   b. ¿Cuánto mide $\overline{CD}$?



Cuaderno de Actividades
Páginas 88 a 91.

Reflexiona y responde

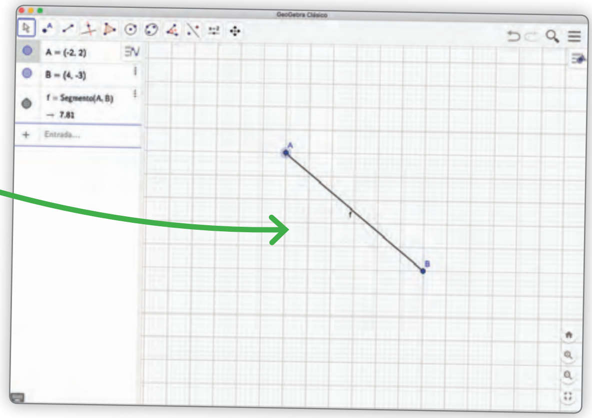
- ¿En qué situaciones de la vida cotidiana puedes aplicar estos nuevos conocimientos y habilidades?
- ¿Qué datos necesitas para aplicar el teorema de Pitágoras? Ejemplifica.
- ¿Cómo puedes demostrar tus aprendizajes sobre el teorema de Pitágoras? Explica.

Herramientas tecnológicas

En la siguiente actividad podrás demostrar que en cualquier triángulo rectángulo se cumple que **la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa**. Para ello, utilizaremos el programa GeoGebra.

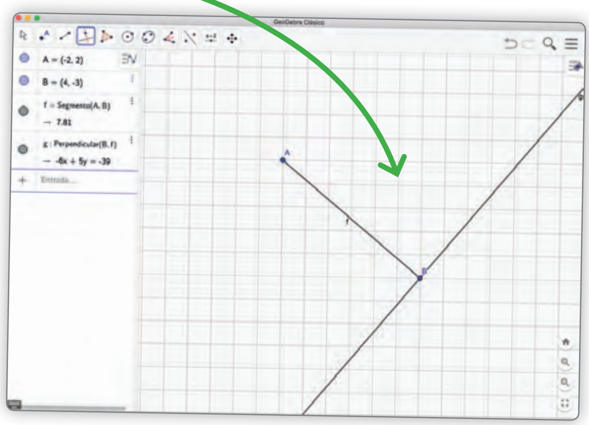
Instrucciones

1. **Construye un segmento.**
   Pincha , selecciona , luego pincha en dos puntos del plano. Habrás creado el segmento $\overline{AB}$.



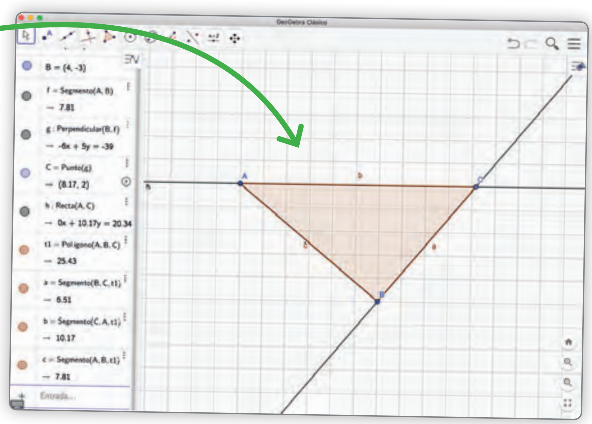
2. **Traza una perpendicular al segmento $\overline{AB}$.**
   Pincha , luego pincha sobre cualquier punto del segmento $\overline{AB}$, y desplaza la recta hasta el extremo B. Habrás trazado la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por B.

3. **Sobre la recta crea el punto C.**
   Pincha , selecciona "punto" y haz clic en cualquier lugar sobre la recta. Habrás creado el punto C sobre la recta.



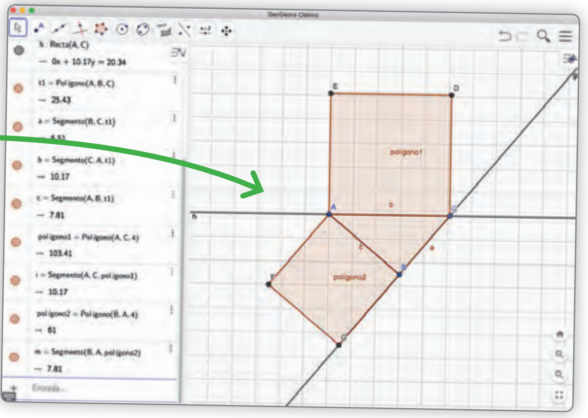
4. **Dibuja el segmento $\overline{AC}$.**
   Selecciona , pincha , luego haz clic sobre A y C. Habrás creado el segmento $\overline{AC}$.

5. **Construye el polígono ABC.**
   Selecciona , pincha sobre A, B, C, A y habrás construido el polígono ABC.

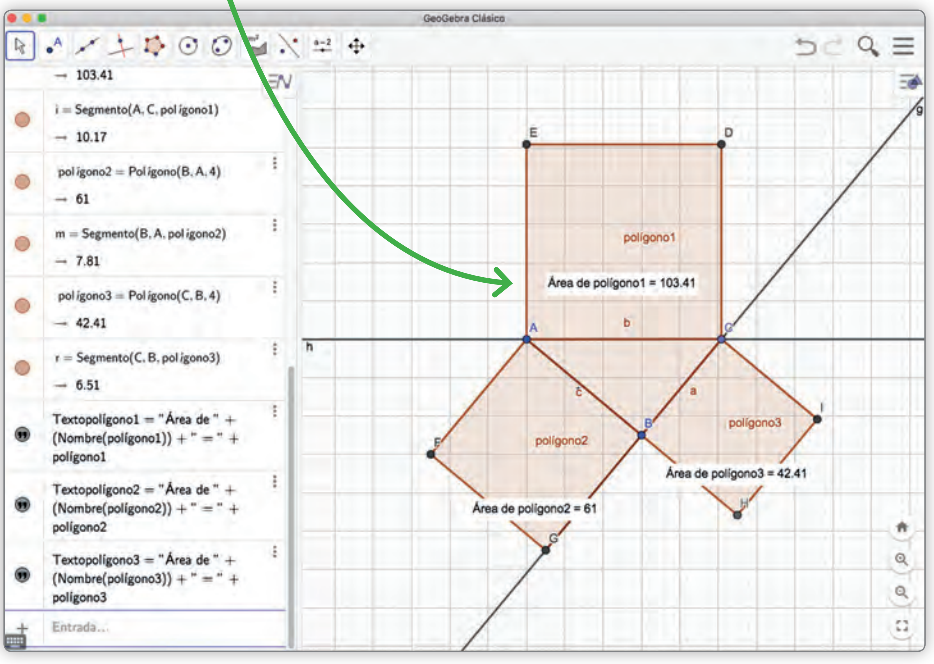


6. **Construye los cuadrados sobre cada lado del triángulo ABC.**
   Selecciona , luego selecciona " polígono regular". Haz clic sobre A y luego sobre C, aparecerá un cuadro donde debes poner el número de lados del polígono que quieres construir, en este caso 4.

7 Construye los cuadrados sobre los otros lados del triángulo, siguiendo las mismas indicaciones del paso 6 pero considerando los otros puntos.



8 **Calcula el área de cada cuadrado.** Selecciona , y pincha sobre área, . Haz clic sobre cada uno de los cuadrados construidos y obtendrás el área de ellos.



9 Suma las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y compárala con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

10 Repite el procedimiento construyendo un triángulo distinto.

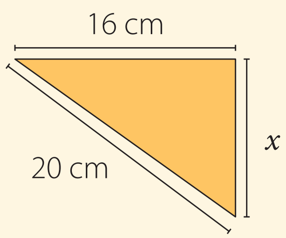
Responde:

1. ¿Cómo se relaciona la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa?
2. ¿Crees que esta relación varía según el triángulo que se considere? ¿Por qué?
3. ¿Qué relación existe entre la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ y las áreas de los cuadrados? Comenta con tu curso.

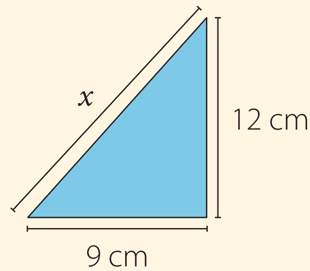
Evaluación Lección 2

1. Calcula la medida del lado desconocido (x) en cada triángulo. Comprueba con tu calculadora.

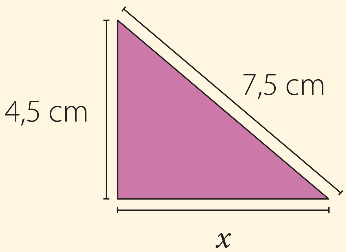
a.



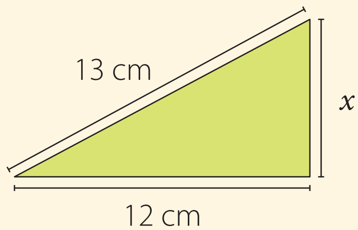
b.



c.



d.



2. Determina si los siguientes números forman tríos pitagóricos.

a. 1, 2 y 3

b. 2, 3 y 4

c. 3, 4 y 5

d. 7, 24 y 25

e. 5, 11 y 12

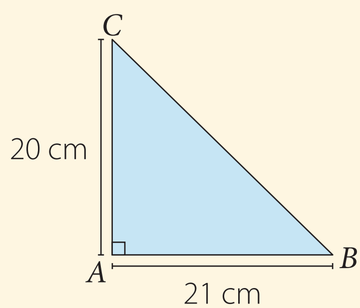
f. 8, 15 y 17

3. Calcula la medida de la hipotenusa de los triángulos que hacen referencia al siguiente triángulo, que es rectángulo en el vértice A:

a. Hipotenusa del triángulo ABC.

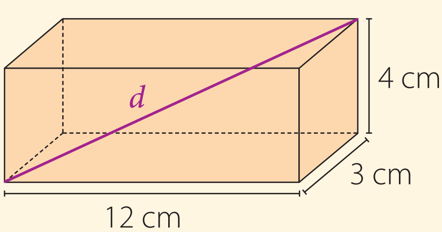
b. Hipotenusa del triángulo cuyos catetos miden el doble de los catetos del triángulo ABC.

c. Hipotenusa del triángulo cuyos catetos miden la mitad de los catetos del triángulo ABC.

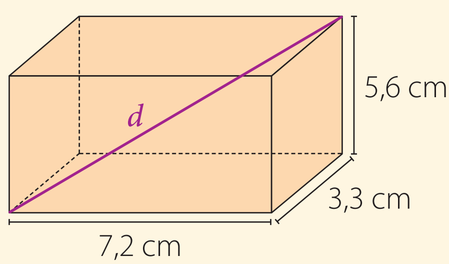


4. Calcula la medida de la diagonal d de los siguientes prismas rectos:

a.

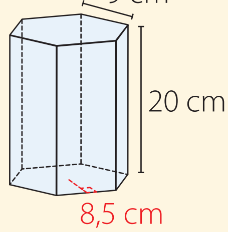


b.

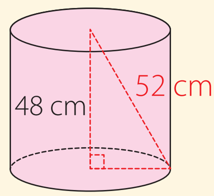


5. Calcula el área total (A_T) y el volumen (V) de los siguientes cuerpos geométricos. Si es necesario, utiliza calculadora. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

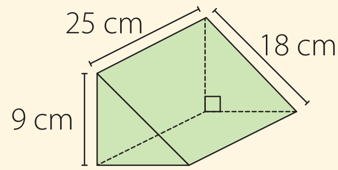
a.



b.



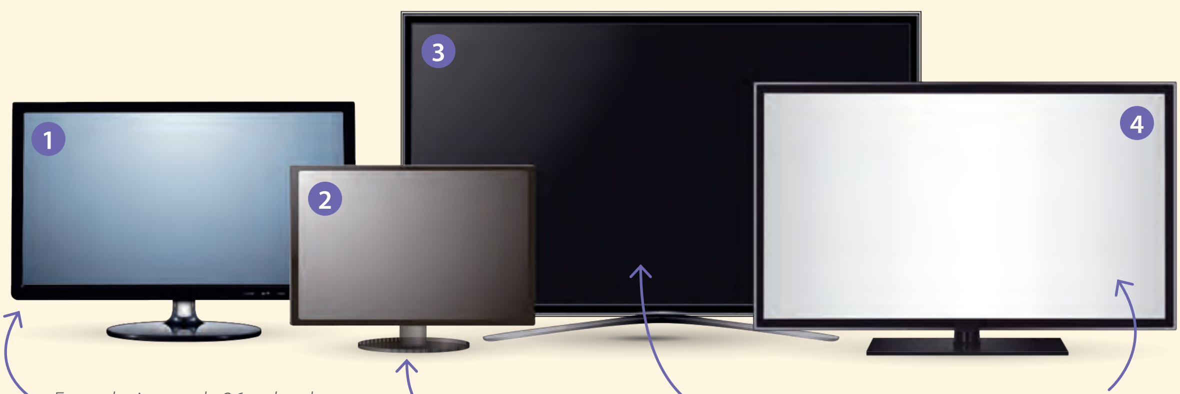
c.



6. Resuelve los siguientes problemas.

a. Una escalera con una extensión de 8 m se encuentra apoyada en una pared. Si el punto de contacto con el suelo está a 2 metros de la base de dicha pared, ¿cuál es la altura alcanzada por la escalera?

b. Un televisor es un aparato electrónico destinado a la recepción y reproducción de señales de televisión. Gracias a los grandes avances tecnológicos, se ha hecho posible la invención de múltiples televisores con caracteres innovadores, los cuales son cada vez más livianos y tan delgados que pueden ser colgados en la pared como un cuadro más de la casa.



Este televisor es de 26 pulgadas, es decir, esa es la medida de la diagonal de su pantalla. Su alto mide 14 pulgadas y su largo, 22 pulgadas.

Este televisor es de 22 pulgadas y su largo mide 18 pulgadas.

Este televisor es de 40 pulgadas y su alto mide 22 pulgadas.

El alto de este televisor es de 30 pulgadas y tiene 40 pulgadas de largo.

- Según las dimensiones del primer televisor, ¿se cumple el teorema de Pitágoras? Justifica.
- ¿Cuál es la medida del alto del televisor 2?
- ¿Cuánto mide el largo del televisor 3?
- ¿De cuántas pulgadas es el televisor 4?

Cuaderno de Actividades
Páginas 92 y 93.

Reflexiona y responde

- ¿Cómo puedes superar las dificultades tuviste en el desarrollo de la lección? Explica.
- ¿Crees que respetar y considerar los aportes de tus compañeros favorece a tu aprendizaje? ¿Por qué?
- Representa algunos ejemplos de triángulos en los que puedas aplicar el teorema de Pitágoras.

Lección 3 Transformaciones isométricas

Traslación

Los frisos decorativos son una larga banda pintada, esculpida o incluso caligrafiada.

En esta lección podrás realizar traslaciones, rotaciones y reflexiones de figuras en el plano cartesiano y en el espacio.

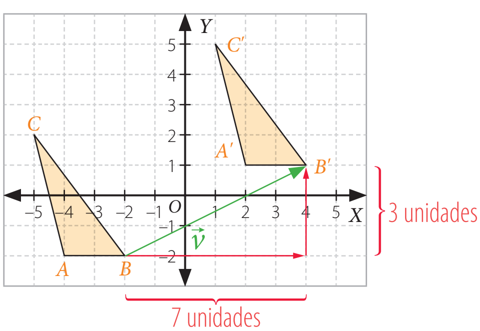
Palacio de la Alhambra. Granada, España.

- ¿Dónde has visto construcciones como la que se muestra en la imagen?

Ejemplo 1

Traslada en el plano cartesiano el triángulo ABC, de vértices $A(-4, -2)$, $B(-2, -2)$ y $C(-5, 2)$, con respecto al vector $\vec{v} = (6, 3)$ y determina las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$.

1. Como el vector de traslación es $\vec{v} = (6, 3)$, el triángulo ABC se traslada 6 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.

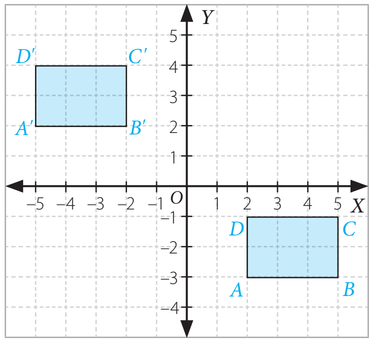


- **Isometría:** es de origen griego y significa "igual medida" (iso = igual o mismo, metría = medir).

2. Las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$ son $A'(2, 1)$, $B'(4, 1)$ y $C'(1, 5)$.

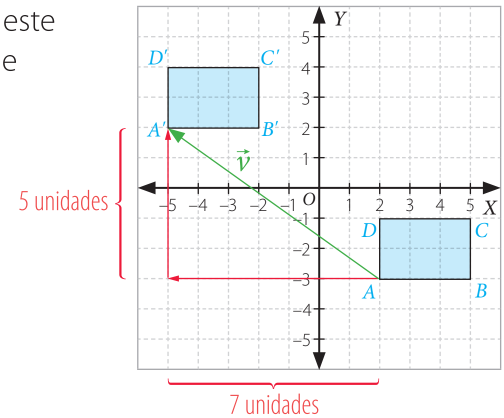
Ejemplo 2

Determina el vector de traslación respecto al cual se trasladó el rectángulo $ABCD$ para obtener su imagen $A'B'C'D'$.



1. Escogemos uno de los vértices del rectángulo $ABCD$. En este caso elegiremos el vértice A, y contamos las unidades que se trasladó hasta el vértice A'.

2. Como el vértice A se trasladó 7 unidades a la izquierda y 5 unidades hacia arriba en el plano cartesiano, la primera componente del vector buscado será –7 y la segunda, 5. Es decir, el vector de traslación es $\vec{v} = (-7, 5)$.



3. Podemos comprobar nuestra solución restando las coordenadas de A' con las de A.

Las coordenadas de A' son (–5, 2) y las de A son (2, –3). Luego, realizamos la sustracción:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (-5, 2) - (2, -3)\\ &= (-5 - 2, 2 - (-3))\\ &= (-7, 5)\end{aligned}$$

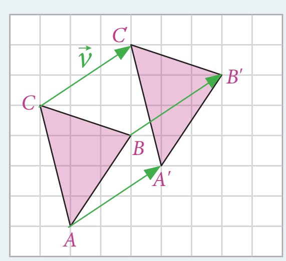
- Si en un vector $\vec{v} = (a, b)$ a es igual a cero, la figura no se traslada horizontalmente (izquierda o derecha). Si b es igual a cero, la figura no se traslada verticalmente (arriba o abajo).

Lo anterior se cumple con cualquier pareja de vértices correspondientes, es decir, si consideramos que las coordenadas de B' son (–2, 2) y las de B son (5, –3) obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (-2, 2) - (5, -3)\\ &= (-2 - 5, 2 - (-3))\\ &= (-7, 5)\end{aligned}$$

Aprende

- Una **traslación de una figura geométrica** desplaza todos los puntos de ella en una misma magnitud, dirección y sentido.
- Al trasladar un punto A, le corresponderá otro punto A' donde $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, que es el **vector de traslación**.



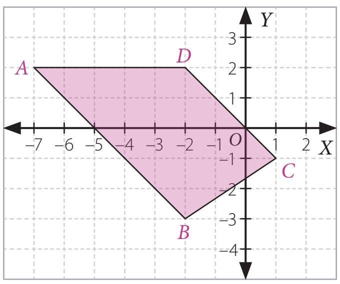
Actividades

1. Traslada cada punto según el vector dado e indica las coordenadas resultantes.
   - **a.** $P(5, 3)$ según el vector $\vec{v} = (0, 3)$.
   - **b.** $Q(-2, 6)$ según el vector $\vec{u} = (3, 0)$.
   - **c.** $R(-3, -4)$ según el vector $\vec{w} = (-3, -4)$.
   - **d.** $S(4, -5)$ según el vector $\vec{z} = (-2, 8)$.
   - **e.** $T(10, 8)$ según el vector $\vec{h} = (-5, -8)$.
   - **f.** $U(12, -10)$ según el vector $\vec{k} = (-10, 6)$.

2. Aplica a cada figura una traslación según el vector indicado y escribe las coordenadas de los vértices de la figura imagen.

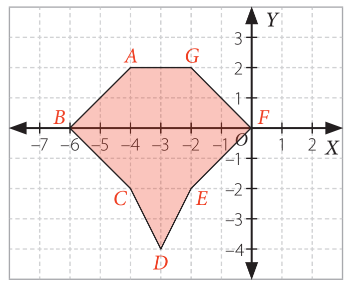
a.

$\vec{v} = (-1, -1)$

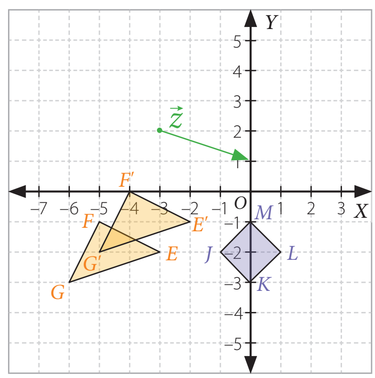


b

$\vec{w} = (4, 2)$



3. A partir del plano cartesiano, realiza las siguientes actividades.
   - **a.** Determina las componentes del vector que traslada el triángulo EFG al triángulo $E'F'G'$.
   - **b.** ¿Cuáles son las componentes del vector que traslada el triángulo $E'F'G'$ al triángulo EFG?
   - **c.** ¿Qué relación existe entre las componentes de los vectores encontrados en las preguntas **a.** y **b.**?
   - **d.** Traslada el cuadrado $JKLM$ de acuerdo con el vector $\vec{z}$ y determina las coordenadas de los nuevos vértices.



4. Sea $A(9, -12)$ imagen del punto $B(5, -16)$. Con esta información, responde.
   - **a.** ¿Cuál es el vector que traslada a B en A?
   - **b.** Si A se traslada con respecto al vector de la pregunta anterior, ¿cuáles serían las coordenadas de su imagen?

Cuaderno de Actividades
Páginas 94 y 95.

Reflexiona y responde

- Explica cómo trasladar figuras en el plano cartesiano respecto de un vector.

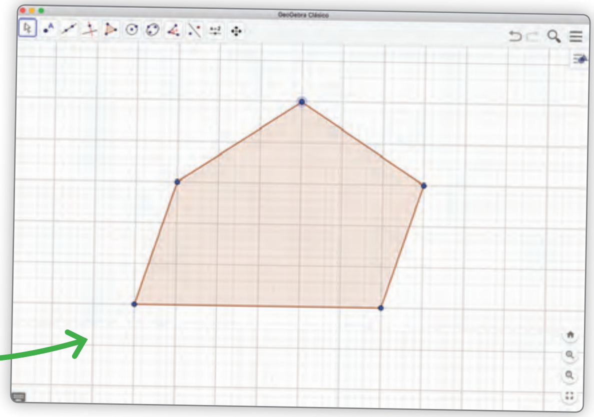
Herramientas tecnológicas

Traslación de un pentágono

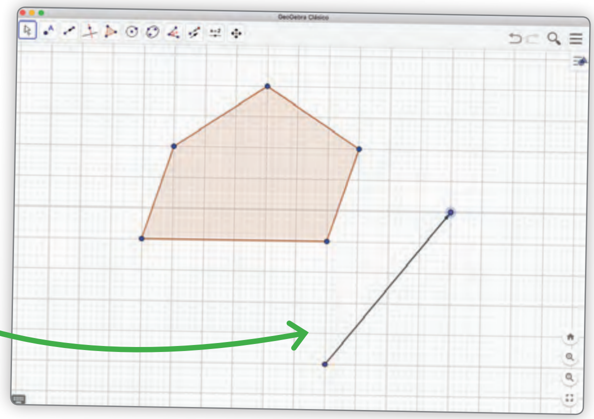
Usando el programa GeoGebra, puedes construir transformaciones isométricas mediante los siguientes pasos.

1. Utiliza una hoja nueva, presiona el botón derecho y selecciona **ejes**. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona **cuadrícula**.

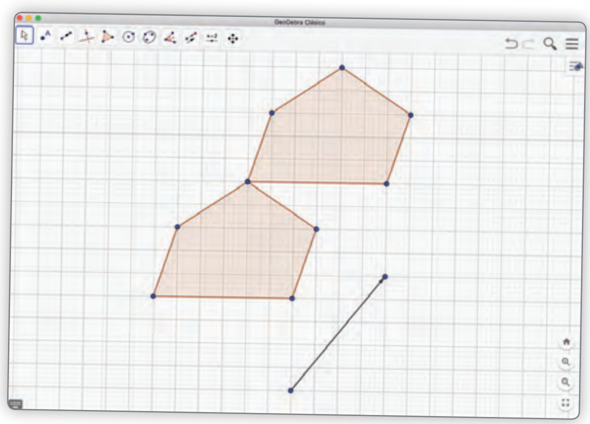
2. En las herramientas del *software*, selecciona **Polígono**. Luego, en la cuadrícula dibuja un polígono haciendo clic en distintos puntos. Recuerda que el último clic siempre se debe hacer sobre el primer vértice que generaste.



3. Dibuja un vector presionando la herramienta **vector entre dos puntos**.



4. Para trasladar la figura respecto al vector, selecciona la herramienta traslada objeto acorde a vector. Al usar esta herramienta, haz clic primero sobre el objeto a trasladar y luego sobre el vector de traslación.



Nota:
la aplicación Geogebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

Rotación

Al observar el siguiente cuadro desde un lado, se pueden ver manzanas, peras, uvas e higos ubicados en un cesto.

Al darle vuelta, como si se soltara la fruta, repentinamente aparece un retrato en el que se pueden distinguir los ojos y otros aspectos del rostro.

▪ *Testa reversibile con cesto di frutta (Cesta de frutas).* Giuseppe Arcimboldo. Italia, 1590.

- ¿Qué movimiento se debe aplicar al cuadro para lograr visualizar el retrato? Descríbelo.

Ejemplo 1

Utilizando regla y compás rota el triángulo ABC, respecto al punto O, en 90°.

Para rotar un triángulo ABC con respecto a un punto O y ángulo de rotación 90º en sentido antihorario, utilizaremos regla, compás y transportador.

1. Dibujamos una circunferencia con centro O y radio $\overline{OC}$ y con un transportador determinaremos un ángulo de 90º. Luego, marcamos la imagen C' en la circunferencia, como se observa en la figura 1.

2. Repetimos el mismo procedimiento para los demás vértices y luego unimos los puntos, con lo que obtenemos la imagen del triángulo, como se observa en la figura 2.

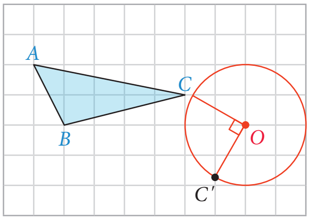


Figura 1

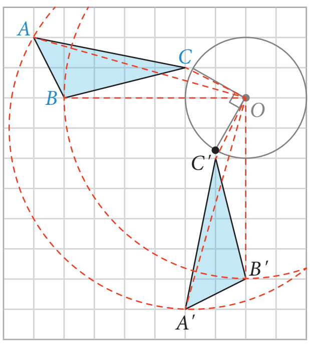
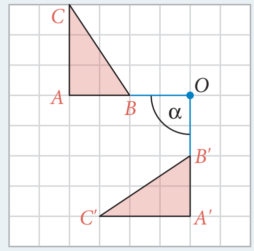


Figura 2

Si se ubica el origen de coordenadas en el punto O, ¿cuáles son las coordenadas del triángulo ABC y $A'B'C'$?

Aprende

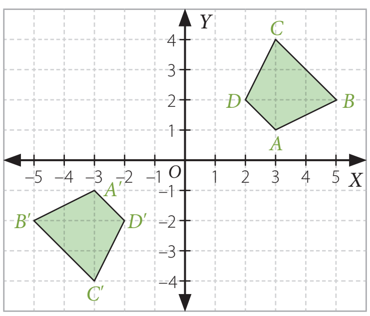
- Para identificar el **ángulo de rotación** de una figura, se une uno de los vértices de la figura original con el de la figura imagen pasando por el centro de rotación y luego se mide el ángulo que se forma.
- Una **rotación** es una transformación isométrica en la cual todos los puntos se mueven respecto de un punto fijo llamado **centro de rotación** (O) en un determinado ángulo, llamado **ángulo de rotación** (α).
- El **ángulo de rotación** puede tener sentido antihorario (positivo) o sentido horario (negativo).

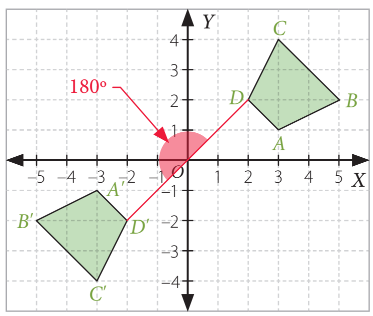


Ejemplo 2

Determina el ángulo de rotación respecto del cual se rotó el cuadrilátero $ABCD$ para obtener su imagen $A'B'C'D'$. Considera que O es el centro de rotación.

1. Trazamos un segmento que pase por O y que una uno de los vértices con su imagen, en este caso D y D'.
2. Identificamos el ángulo de rotación, que es 180º.



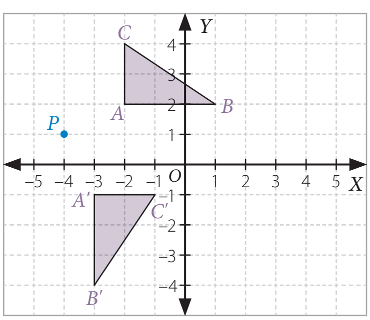


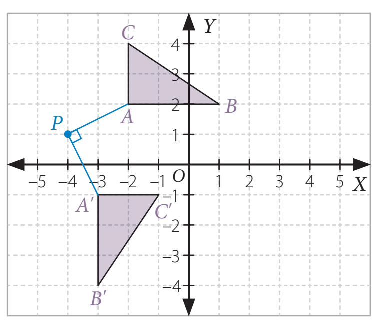
- Si se rota un punto $A(x, y)$ en 180º con centro de rotación el origen O (0,0), las coordenadas del punto resultante serán $A'(-x, -y)$.

Ejemplo 3

Identifica el ángulo de rotación que se le aplicó al triángulo ABC para obtener el triángulo $A'B'C'$ considerando que P es el centro de rotación.

1. Trazamos un segmento que una A con P y otro que una P con A'.
2. Medimos el ángulo que se forma, que en este caso es 90º.



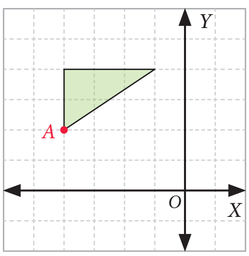


Actividades

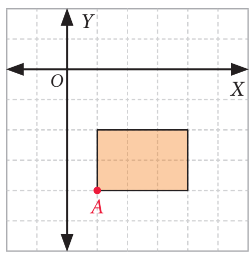
1. **Determina la imagen de los siguientes puntos al rotarlos en el ángulo dado respecto del origen.**
   a. $A(2, 5)$ en un ángulo de 90º en sentido antihorario.
   b. $B(–6, 7)$ en un ángulo de 180º en sentido horario.
   c. $C(2, 5)$ en un ángulo de 270º en sentido antihorario.

2. **Determina el punto al cual se le aplicaron las rotaciones, con respecto al origen, indicadas a continuación.**
   a. $D'(–6, 9)$, su rotación fue en un ángulo de 180º en sentido antihorario.
   b. $E'(3, –5)$, su rotación fue en un ángulo de 90º en sentido antihorario.
   c. $F'(–1, –4)$, su rotación fue en un ángulo de 270º en sentido horario.

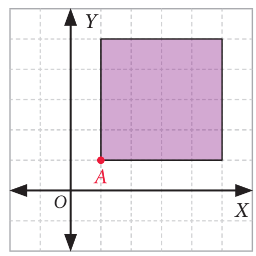
3. **Rota las siguientes figuras en el ángulo indicado y con centro en A.**
   a. Ángulo de 90º en sentido horario.



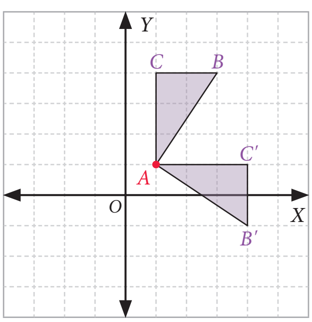
   b. Ángulo de 90º en sentido antihorario.



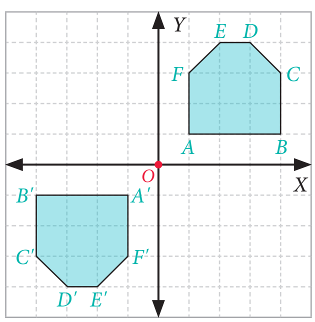
   c. Ángulo de 270º en sentido antihorario.



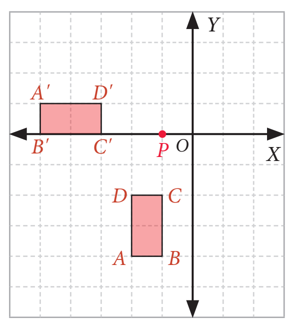
4. **Determina el ángulo respecto al cual se rotaron las siguientes figuras para obtener sus imágenes. Considera el centro de rotación en cada caso.**
   a. Centro de rotación A.



   b. Centro de rotación O.



   c. Centro de rotación P.



Cuaderno de Actividades
Páginas 96 y 97.

Reflexiona y responde

- ¿Qué pasos debes seguir para rotar figuras en el plano cartesiano? Explica con tus palabras.
- ¿Qué elementos se deben considerar al rotar figuras en el plano cartesiano?

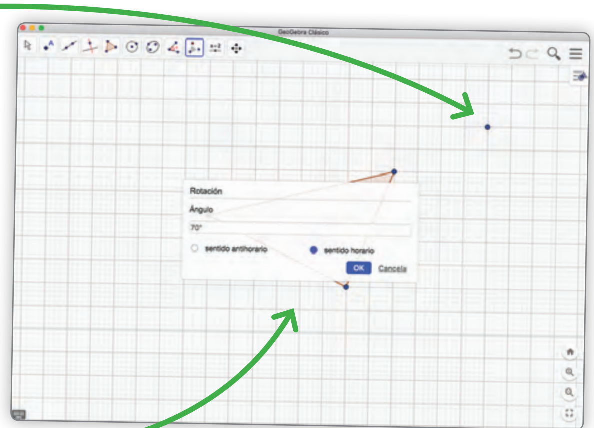
Herramientas tecnológicas

Rotación de un triángulo

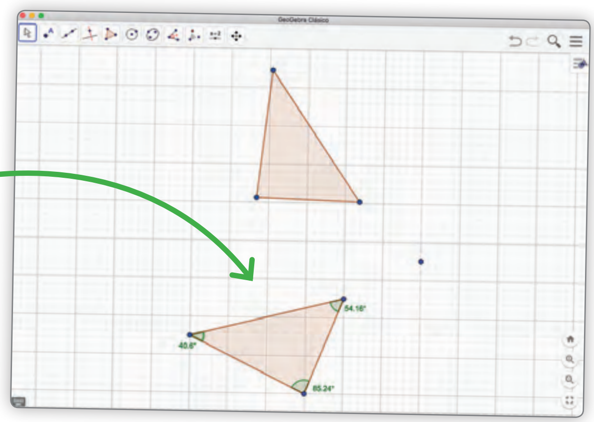
1. Utiliza una hoja nueva, presiona el botón derecho y selecciona **ejes**. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona **cuadrícula**.

2. En las herramientas del *software*, selecciona **Polígono** . Luego, en la cuadrícula dibuja un triángulo haciendo tres clics en distintos puntos; el cuarto clic lo debes hacer sobre el vértice del primer clic del triángulo.

3. Selecciona la herramienta **Nuevo Punto** . Haz clic en cualquier parte de la cuadrícula para dibujar el centro de rotación.



4. Selecciona . Haz clic sobre el triángulo y, luego, sobre el centro de rotación. Aparecerá una tabla en la cual debes ingresar el ángulo de rotación, puede ser 70º (o el que tú quieras). Una vez ingresado el ángulo de rotación, presiona **OK**; aparecerá la imagen rotada en sentido horario.



5. Selecciona la herramienta **Ángulo** . Haz clic sobre cada vértice correspondiente al ángulo interior del triángulo, en sentido antihorario; aparecerán las medidas de los ángulos interiores como se muestra en la figura.

Responde:

1. **Luego de realizar los pasos anteriores, responde.**
   - **a.** ¿Cuánto mide cada ángulo interior de la figura inicial y de la imagen?, ¿cómo se relacionan?
   - **b.** Calcula el perímetro, el área y las medidas de cada lado de ambas figuras usando las herramientas del *software*. ¿Qué observas? ¿Ocurrirá lo mismo en cualquier transformación isométrica?, ¿por qué?

Nota: la aplicación Geogebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

Reflexión

Algunos objetos o diseños deben parte de su belleza a la presencia de simetrías. Observa las siguientes pinturas.

■ *Nascita di Venere (El nacimiento de Venus).* Sandro Botticelli. Italia, 1484.

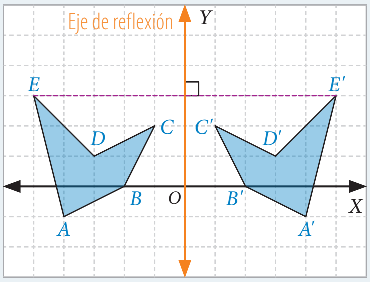
■ *Les Demoiselles d'Avignon (Las señoritas de Avignon).* Pablo Picasso. España, 1907.

- ¿En cuál de ellos consideras que hay más simetrías? ¿Por qué?
- Averigua a qué corrientes artísticas se relacionan estas pinturas. Luego, comparte tu investigación con tu curso.

Aprende

Una **reflexión** es una transformación isométrica en la que a cada punto de una figura se le asocia otro punto, llamado imagen. El punto y su imagen deben estar a igual distancia de una recta llamada eje de reflexión o de simetría y el segmento que une el punto con su imagen debe ser perpendicular a ella.

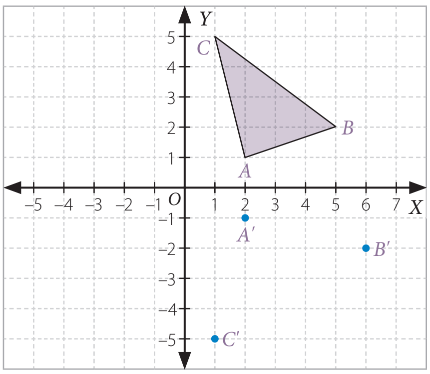
Por ejemplo, al pentágono $ABCDE$ se le aplicó una reflexión con respecto al eje Y en el plano cartesiano.



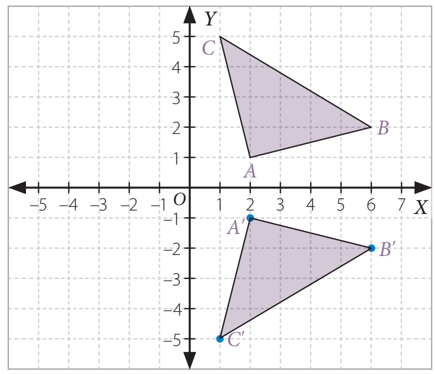
Ejemplo

Realiza una reflexión al triángulo ABC, de vértices $A(2, 1)$, $B(6, 2)$ y $C(1, 5)$, con respecto al eje X.

1. Representamos el triángulo ABC en el plano cartesiano y dibujamos los puntos simétricos a sus vértices con respecto al eje X.

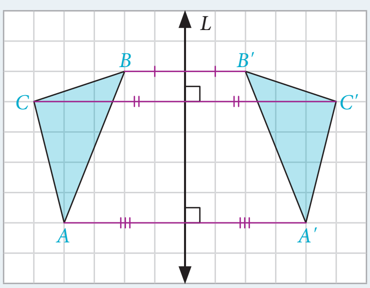


2. Unimos los puntos y dibujamos el triángulo $A'B'C'$, que es la imagen del triángulo ABC.

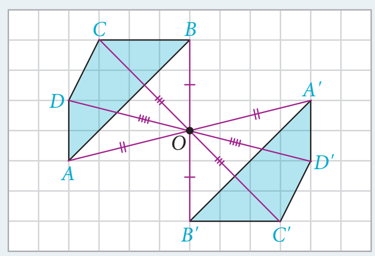


Aprende

- La **simetría axial** es una reflexión en la que todos los puntos de la figura original y su imagen están a igual distancia de una recta.

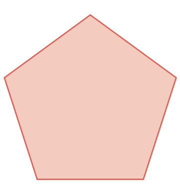


- La **simetría central** es una reflexión en la que todos los puntos de la figura original y sus respectivas imágenes están a igual distancia de un punto, llamado **punto de simetría**.



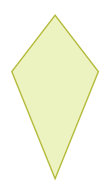
Actividades

1. **Una línea de simetría divide a una figura en dos partes simétricas. Encuentra la o las líneas de simetría en las siguientes figuras.**

a. 

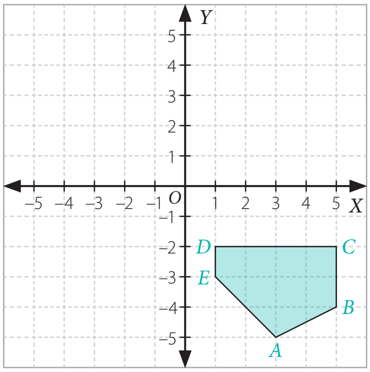
b. 

c. 

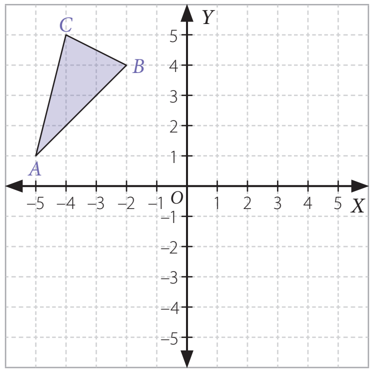
d. 

2. **Realiza las siguientes actividades.**

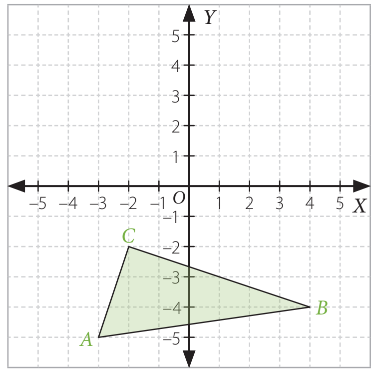
a. Refleja el pentágono $ABCDE$ respecto al eje X.



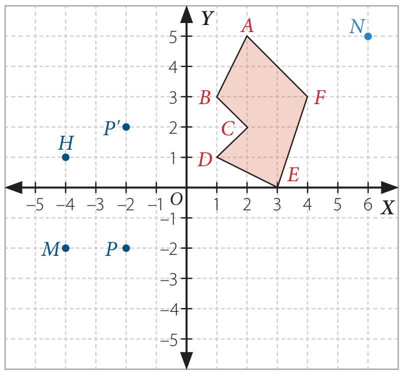
b. Refleja el triángulo ABC respecto al eje Y.



c. Refleja el triángulo ABC respecto al eje X.



3. **Observa el siguiente plano cartesiano y realiza las actividades.**



a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que se obtuvo al aplicar una reflexión al punto H con respecto al eje Y?

b. ¿Qué punto se obtuvo al aplicar una reflexión al punto P con respecto al eje X?

c. Al aplicar una reflexión al punto M con respecto al eje X resulta el punto M'. ¿Cuáles son sus coordenadas? Y si se aplica una reflexión con respecto al eje X al punto M', ¿cuáles son sus coordenadas?

d. Al aplicar una reflexión al punto M con respecto al eje Y resulta el punto M''. ¿Cuáles son sus coordenadas?

e. Al aplicar una reflexión al punto N con respecto al eje X resulta el punto N'. ¿Cuáles son sus coordenadas?

Cuaderno de Actividades
Páginas 98 y 99.

Reflexiona y responde

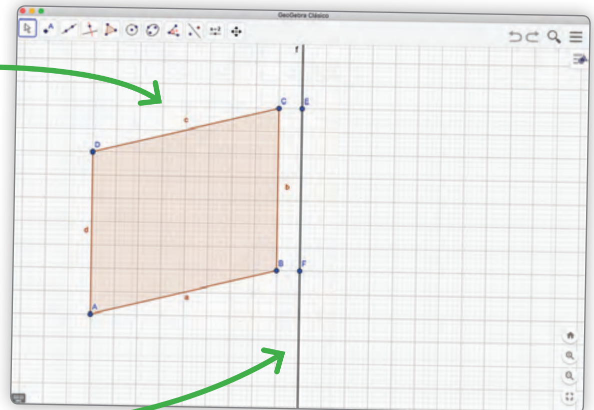
- ¿Qué es una reflexión? Ejemplifica.
- ¿Qué diferencias reconoces entre una rotación y una reflexión?

Herramientas tecnológicas

Reflexión de un cuadrilátero

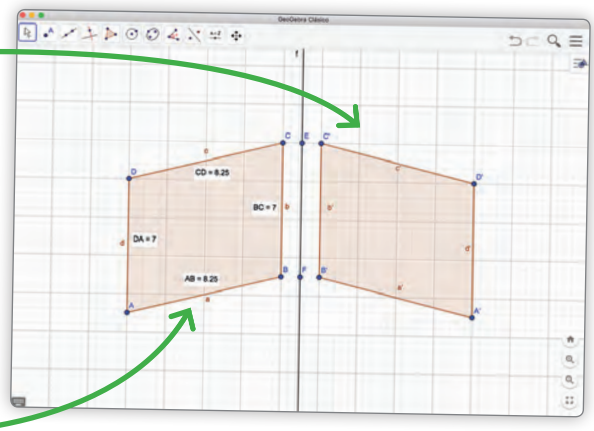
1. Utiliza una hoja nueva, presiona el botón derecho y selecciona **ejes**. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona **cuadrícula**.

2. En las herramientas del *software*, selecciona **Polígono** . Luego, en la cuadrícula dibuja un triángulo haciendo tres clics en distintos puntos; el quinto clic lo debes hacer sobre el vértice del primer clic del cuadrilátero.



3. Selecciona la herramienta **Recta que pasa por Dos Puntos** . En la cuadrícula, haz dos clics en distintos puntos para dibujar el eje de simetría, como se muestra en la figura.

4. Selecciona la herramienta **Refleja objeto en recta** . Haz clic sobre el cuadrilátero y, luego, sobre la recta y aparecerá la siguiente imagen.



5. Selecciona la herramienta **Distancia** o **Longitud** . Haz clic sobre cada lado de la figura inicial y, luego, sobre cada lado de la imagen; aparecerán las medidas de todos los lados.

Responde:

1. **Luego de realizar los pasos anteriores, responde.**
   - **a.** ¿Cuánto mide cada lado de la figura inicial y de la imagen?, ¿cómo se relacionan?
   - **b.** Calcula el perímetro y el área de ambas figuras usando las herramientas del *software* y compáralas.
   - **c.** ¿Ocurrirá lo mismo en cualquier polígono al que apliques una reflexión?, ¿cómo lo supiste?
   - **d.** En una nueva aplicación de GeoGebra, dibuja otro polígono (que no sea cuadrilátero), realiza los mismos pasos anteriores y responde las preguntas **a.**, **b.** y **c.**.

Composición de transformaciones **isométricas**

El holandés Maurits Cornelis Escher es un artista cuyo trabajo ha interesado a muchos matemáticos porque utiliza patrones de figuras que cubren una superficie plana sin superponer las figuras ni dejar espacios libres entre ellas.

Observa la imagen y responde.

- ¿Qué transformación isométrica es necesario aplicar a la figura 1 para obtener la figura 2?, ¿y para obtener la figura 3?

Aprende

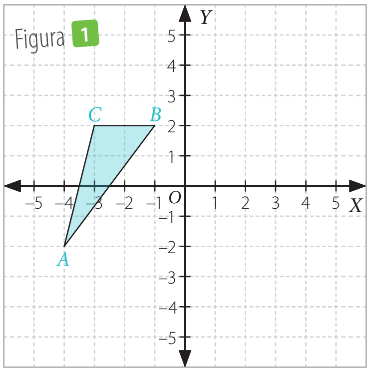
La **composición de transformaciones isométricas** consiste en aplicar una transformación isométrica a una figura y sobre la figura imagen aplicar otra transformación isométrica, y así sucesivamente.

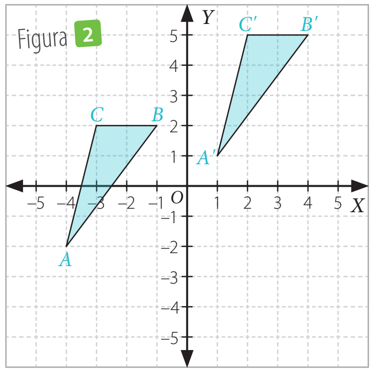
Ejemplo 1

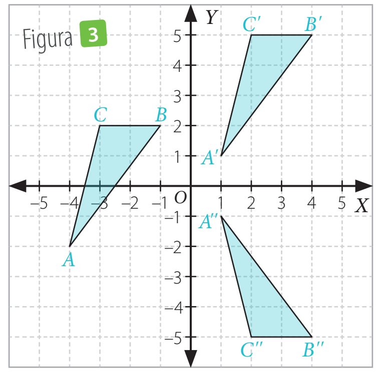
Traslada el triángulo ABC, de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 2)$ y $C(-3, 2)$, respecto del vector $\vec{v} = (5, 3)$. Luego, refleja su figura imagen respecto del eje X.

1. Representamos el triángulo ABC en el plano cartesiano.
2. Trasladamos el triángulo ABC respecto del vector $\vec{v} = (5, 3)$.

3. Finalmente, reflejamos el triángulo $A'B'C'$ respecto al eje X. Las coordenadas del triángulo resultante son $A''(1, -1)$, $B''(4, -5)$ y $C''(2, -5)$.



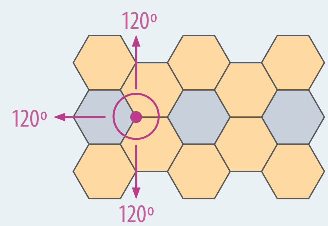




Aprende

Una **teselación** es una regularidad o patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana y que cumple con dos condiciones: que no queden espacios y que no se sobrepongan las figuras.

Las teselaciones se pueden crear usando transformaciones isométricas sobre una o varias figuras. La suma de los ángulos de las figuras que concurren a un vértice es 360º.



Ejemplo 2

Una familia quiere poner baldosas con forma de hexágono regular en su patio, de manera que cubran todo el piso. ¿Cómo se puede crear un diseño para el piso?

1. Dibujamos un hexágono inicial $ABCDEF$ que represente una baldosa.

2. Le aplicamos reflexiones respecto de los segmentos $\overline{FA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$. Las reflexiones las puedes construir con regla y compás. Obtenemos lo siguiente:

3. Luego, a esta nueva figura le aplicamos sucesivas traslaciones hacia la derecha. Puedes trasladar cada uno de los puntos de la figura con regla y compás. Así, seguimos aplicando transformaciones isométricas hasta cubrir el piso por completo.

Figura 1

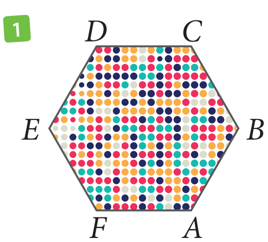


Figura 2

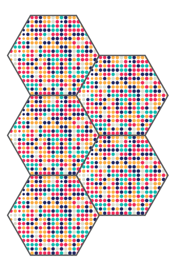
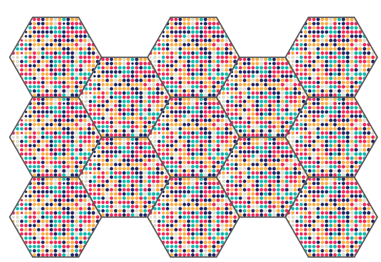
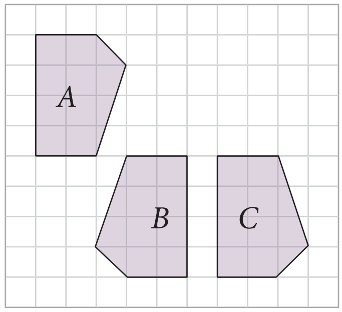


Figura 3

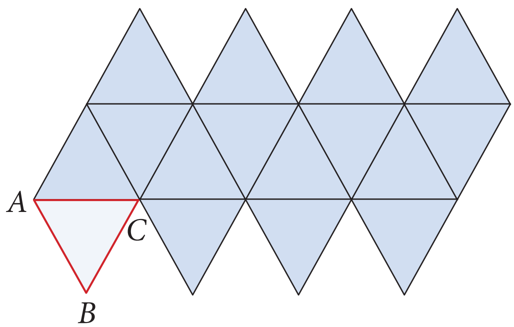


Actividades

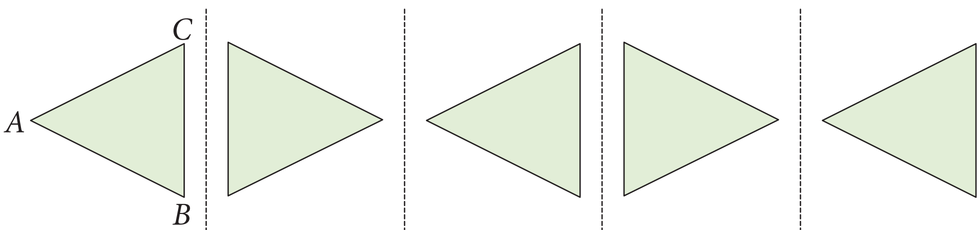
1. ¿Qué transformaciones isométricas se le aplicaron a la figura A para obtener la figura C pasando por B?



2. Escribe las transformaciones isométricas aplicadas al triángulo ABC para lograr la siguiente teselación.

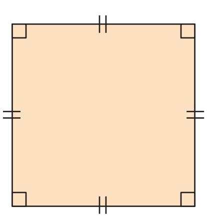


3. Describe mediante qué transformaciones aplicadas al triángulo ABC se puede construir el siguiente diseño.

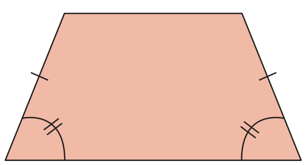


4. Identifica con cuál o cuáles de las siguientes figuras es posible teselar un plano. Luego, construye teselaciones en tu cuaderno a partir de las figuras seleccionadas y describe las transformaciones isométricas que aplicaste para teselar.

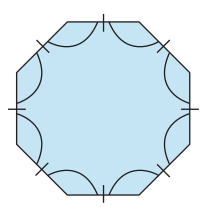
a.



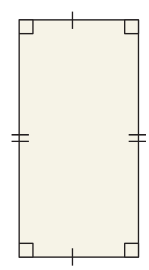
b.



c.

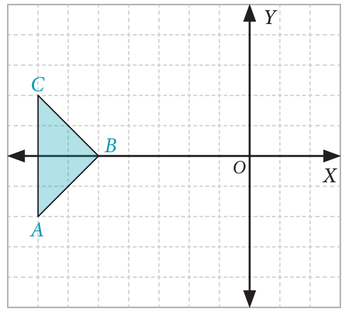


d.

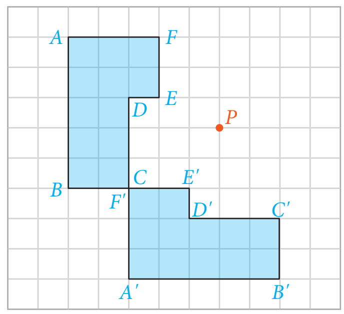


5. Reúnete con un compañero o compañera y dibujen cada uno un cuadrilátero en el plano cartesiano con los vértices que prefieran y aplíquenle una reflexión respecto al eje X. Luego, roten la imagen con respecto al origen en 180º y finalmente apliquen una traslación respecto del vector $\vec{v} = (2, -2)$. Comparen sus resultados.

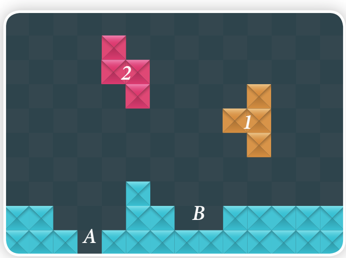
6. Traslada el triángulo ABC respecto del vector $\vec{u} = (3, 0)$ y luego refléjalo con respecto al eje Y. Si inviertes el orden de las transformaciones, ¿cambian las coordenadas de los vértices de la figura imagen? ¿Qué puedes concluir?



7. A la figura $ABCDEF$ se le ha aplicado una rotación en 90º con respecto al punto P. Copia en tu cuaderno la figura y construye con regla y compás, mediante traslaciones y reflexiones, una transformación isométrica equivalente a esa rotación.



8. El Tetris es un videojuego en el cual se deben aplicar repetidas veces transformaciones isométricas a figuras diferentes para hacerlas encajar. Considerando la jugada que aparece en la imagen, ¿qué transformaciones isométricas debes realizar para hacer encajar correctamente la figura 1 en A?, ¿y para encajar la figura 2 en B?



Cuaderno de Actividades
Páginas 100 a 103.

Reflexiona y responde

- Explica qué es una teselación y cómo se relaciona con las transformaciones isométricas.
- ¿Qué conocimientos previos te ayudaron a comprender las teselaciones?
- ¿Cómo puedes comprobar que una teselación es correcta?

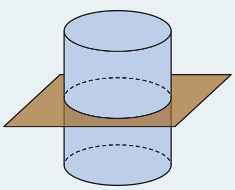
Transformaciones isométricas en el espacio

El ser humano siempre se ha comunicado utilizando su cuerpo. En principio, la danza tenía un componente ritual, celebrada en ceremonias de fecundidad, caza, guerra, religión, entre otras.

- ¿Cómo se relacionan los movimientos del cuerpo con las transformaciones isométricas?
- Si una persona realiza un giro, ¿lo está llevando a cabo en el plano o en el espacio? Comenta con tu curso.

Aprende

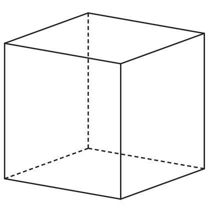
Un cuerpo geométrico puede tener uno o varios **planos de simetría**, los cuales dividen al cuerpo en dos partes iguales.



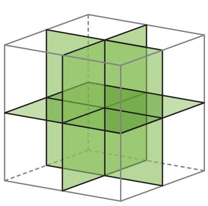
Ejemplo 1

Dibuja el o los planos de simetría de un cubo.

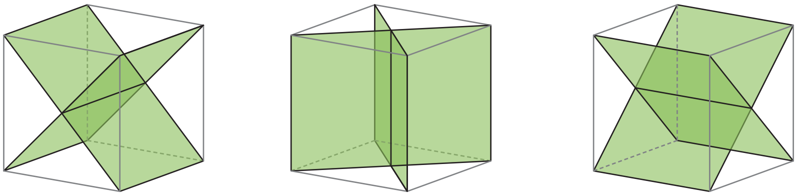
1. Dibujamos un cubo para poder identificar los planos de simetría que tiene.



2. Un cuerpo puede tener planos de simetría horizontal, vertical o diédricos, por lo que comenzaremos analizando si el cubo tiene planos de simetría horizontales o verticales.



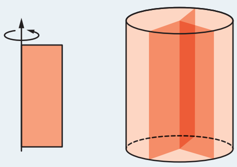
3 El cubo tiene dos planos de simetría verticales y uno horizontal. Luego, identificamos los planos de simetría diédricos.



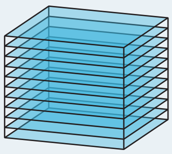
Concluimos que el cubo tiene 6 planos de simetría diédricos, por lo que en total el cubo tiene 9 planos de simetría.

Aprende

- Un cuerpo es **generado por rotación** o es un sólido de revolución si se puede obtener mediante la rotación de una curva o de una figura plana en torno a un eje. Se llama **generatriz** a la figura plana que, por su movimiento, forma un sólido geométrico.



- Un cuerpo es **generado por traslación** si se puede obtener mediante el desplazamiento de una figura plana.

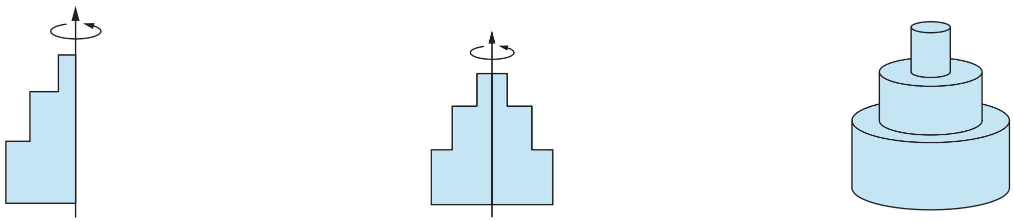


Ejemplo 2

Dibuja el cuerpo que se genera al rotar la siguiente figura alrededor del eje indicado.

1 Copiamos la figura usando el eje como eje de simetría.

2 Dibujamos el cuerpo dándole el volumen correspondiente.

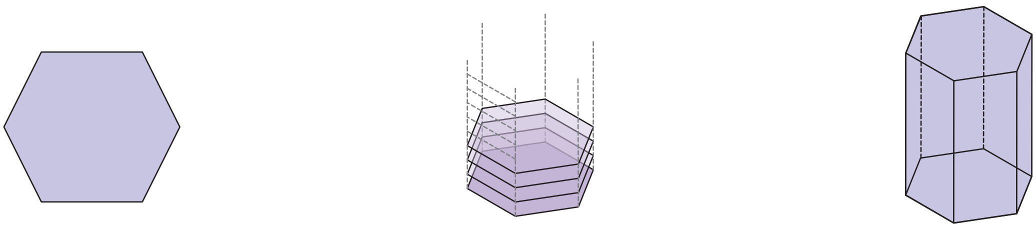


Ejemplo 3

Dibuja el cuerpo que se genera al trasladar la siguiente figura en dirección perpendicular al plano que contiene esta hoja.

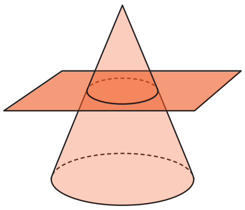
1 Trasladamos el hexágono en forma perpendicular al plano para construir el cuerpo geométrico.

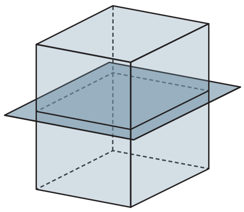
2 Finalmente, dibujamos el cuerpo geométrico, que en este caso es un prisma recto de base hexagonal.

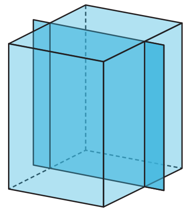


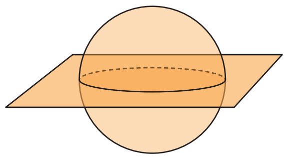
Actividades

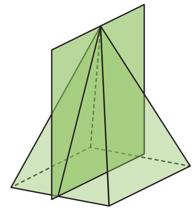
1. Determina si los siguientes son planos de simetría de los cuerpos geométricos que se muestran a continuación.

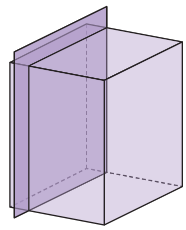
a. 

b. 

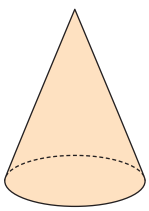
c. 

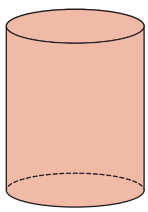
d. 

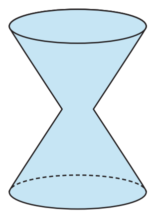
e. 

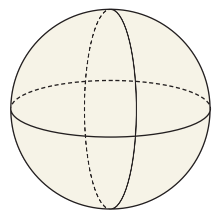
f. 

2. Dibuja el eje de simetría de los siguientes cuerpos generados por rotación.

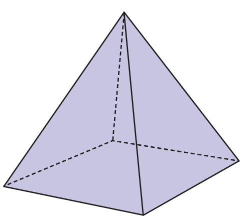
a. 

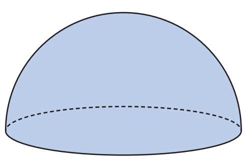
b. 

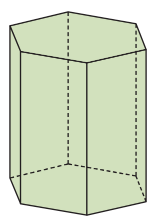
c. 

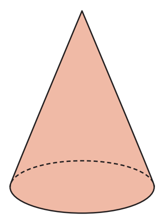
d. 

3. Dibuja un plano de simetría en los siguientes cuerpos geométricos.

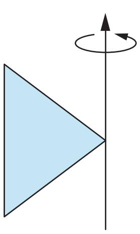
a. 

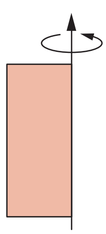
b. 

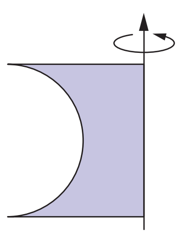
c. 

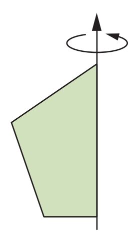
d. 

4. Dibuja el cuerpo que se genera al rotar las siguientes figuras alrededor del eje indicado.

a. 

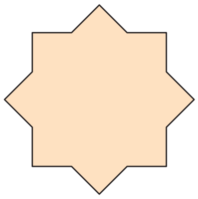
b. 

c. 

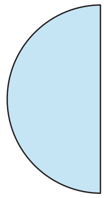
d. 

5. Dibuja el cuerpo que se genera al trasladar las siguientes figuras en dirección perpendicular al plano que contiene esta hoja.

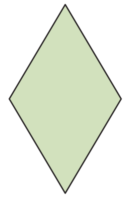
a.



b.



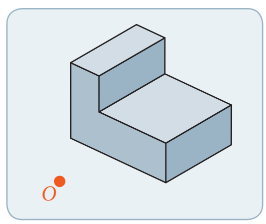
c.



d.

6. Identifica el (los) plano(s) de simetría que puedes observar en las siguientes imágenes presentes en la naturaleza.

7. Realiza en tu cuaderno la reflexión del siguiente cuerpo cuyo centro de simetría es el punto O. Compara lo obtenido con tus compañeros y analicen sus diferencias.



8. Verifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifica las falsas.

a. Un prisma es un sólido de revolución.

b. La esfera es el único cuerpo que posee más de un plano de simetría.

c. Por la altura de un cono pasa un plano de simetría.

d. Un cilindro solo tiene un plano de simetría.

e. Cualquier plano paralelo a la base de un cilindro es un plano de simetría.

f. Los conos tienen infinitos planos de simetría.

Cuaderno de Actividades
Páginas 104 y 105.

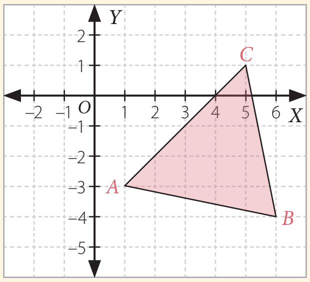
Reflexiona y responde

- ¿Qué entiendes por planos de simetría de un cuerpo geométrico? Explica con tus palabras.
- ¿Qué transformaciones isométricas en el espacio necesitas ejercitar más? ¿Por qué?
- ¿Qué ejemplos de transformaciones en el espacio reconoces en la vida cotidiana?

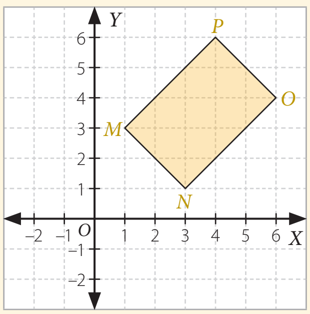
Evaluación Lección 3

1. En tu cuaderno, aplica las transformaciones isométricas pedidas en cada caso.

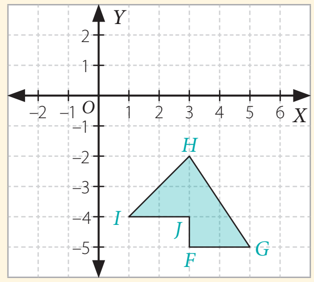
a. Rotación del triángulo ABC respecto del punto $O(0, 0)$ en 90º en sentido horario.



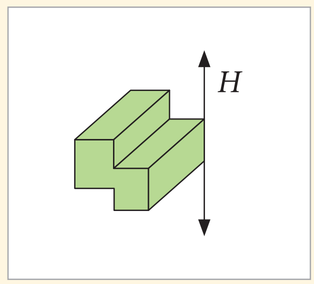
b. Traslación del rectángulo $MNOP$ con respecto al vector $\vec{v} = (2, -4)$.



c. Reflexión del pentágono $FGHIJ$ respecto del eje X y trasladar su imagen según el vector $\vec{v} = (0, -2)$.



d. Reflexión del cuerpo que se representa a continuación respecto de la recta H.



2. Verifica si cada afirmación es verdadera o falsa.

a. Al rotar un cuerpo, este puede cambiar de forma.

b. Al aplicar una transformación isométrica a una figura geométrica, esta puede cambiar de forma.

c. Para aplicar una reflexión a una figura es necesario conocer el vector en que se reflejará.

d. Para aplicar una rotación a una figura se necesita conocer el centro de rotación y el ángulo de rotación.

3. A partir de las coordenadas de los vértices de las siguientes figuras y sus respectivas imágenes, determina el ángulo de rotación que se les aplicó. Todas las rotaciones son con respecto al origen y en sentido antihorario.

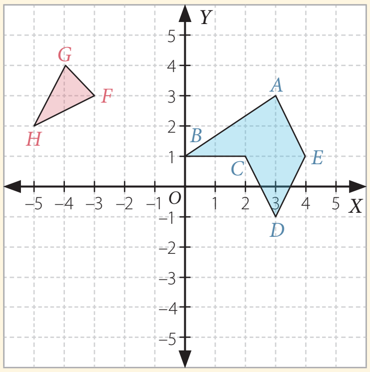
Figura	Vértices	Imágenes
Triángulo	$A(6, 1)$ $B(5, -1)$ $C(8, 1)$	$A'(-6, -1)$ $B'(-5, 1)$ $C'(-8, -1)$
Cuadrilátero	$A(1, 3)$ $B(2, 4)$ $C(4, 4)$ $D(3, 3)$	$A'(3, -1)$ $B'(4, -2)$ $C'(4, -4)$ $D'(3, -3)$
Cuadrilátero	$A(-4, -2)$ $B(-3, -1)$ $C(-2, -3)$ $D(-5, -4)$	$A'(2, -4)$ $B'(1, -3)$ $C'(3, -2)$ $D'(4, -5)$

4. **En el plano cartesiano realiza las siguientes actividades.**

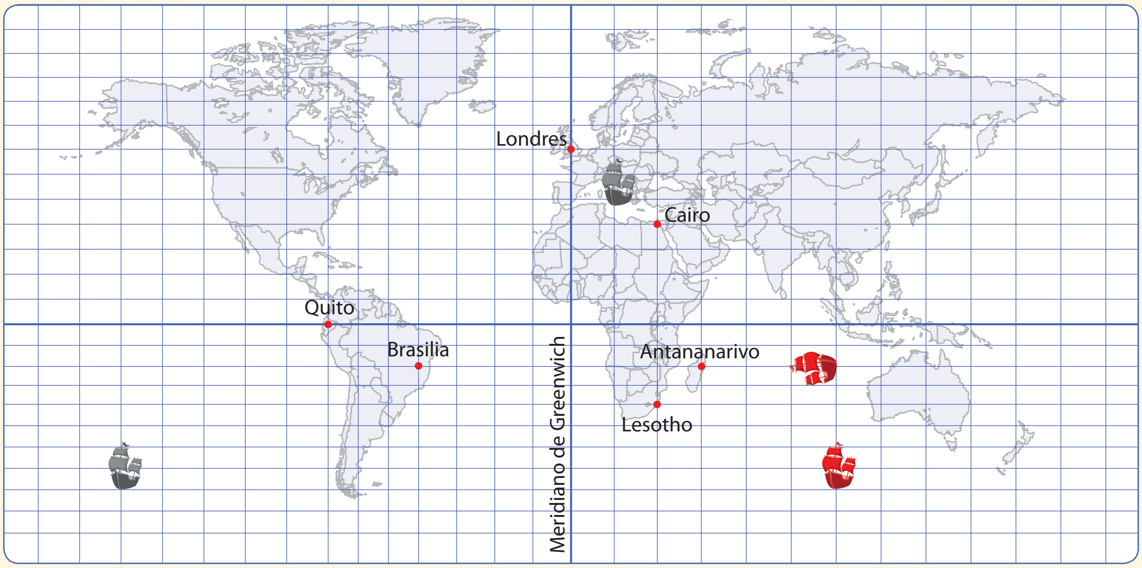
   a. Aplicar una reflexión al triángulo FGH con respecto al eje X. Determina las coordenadas de los vértices de la figura imagen.

   b. Aplicar una reflexión al pentágono $ABCDE$ con respecto al eje Y. Determina las coordenadas de los vértices de la figura imagen.

   c. Aplicar una simetría central a cada uno de los polígonos con respecto al origen. Determina las coordenadas de los vértices de cada figura imagen.



5. **Observa el siguiente mapa y luego responde.**



   a. En relación con los barcos negros, ¿qué transformación isométrica se aplicó para ir de un barco a otro?

   b. En relación con los barcos rojos:
      - ¿Cómo se llama la transformación isométrica que permite ir de uno a otro?
      - ¿En qué ángulo se realizó dicha transformación?

   c. En relación con las ciudades, determina aquellas que son el reflejo de otra con respecto a la línea del ecuador y al meridiano de Greenwich.

Cuaderno de Actividades
Páginas 106 y 107.

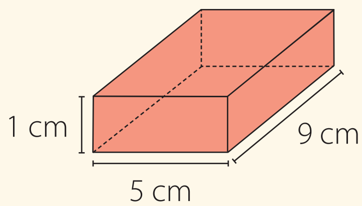
Reflexiona y responde

- ¿Qué entiendes por una transformación isométrica?
- ¿Cuál transformación isométrica crees que es más compleja de aplicar? ¿Por qué?
- ¿En qué situaciones cotidianas puedes observar transformaciones isométricas? Comparte tus ideas con tus compañeros.

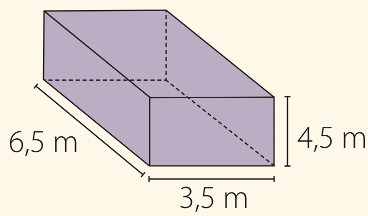
Evaluación final

1. Calcula el área total (A_T) y el volumen (V) de cada cuerpo. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

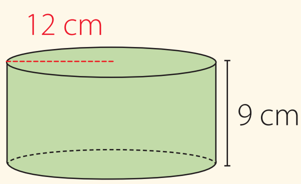
a.



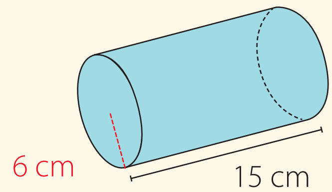
b.



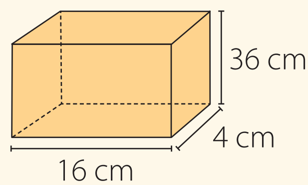
c.



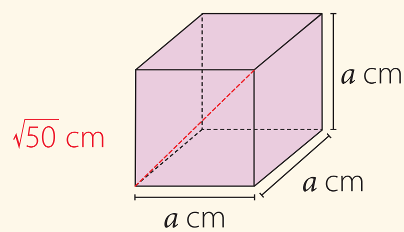
d.



e.

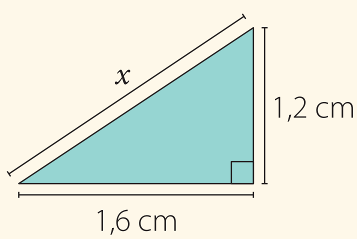


f.

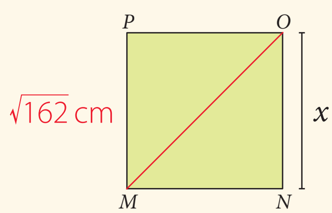


2. Calcula el valor de x en cada caso.

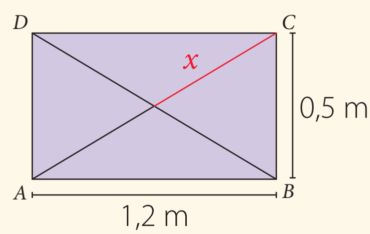
a.



b. Sea $MNOP$ un cuadrado.



c. Sea $ABCD$ un rectángulo.



3. Resuelve los siguientes problemas. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

a. Un tubo que transporta agua tiene un diámetro interior de 25 cm. ¿Cuánta cantidad de agua como máximo puede contener en 120 cm de extensión?

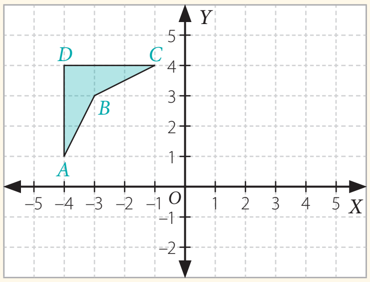
b. Se quiere cubrir con papel una caja con forma de prisma que mide 35 cm de largo, 18 cm de ancho y 16 cm de alto. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel se necesitan como mínimo si se cubren todas las caras de la caja?

c. La diagonal de la base rectangular de un prisma mide 25 cm y uno de sus lados mide 24 cm. Si la altura del prisma es de 8 m, ¿cuál es su área? ¿Cuál es su volumen?

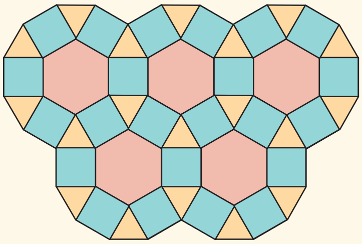
d. En un envase cilíndrico alcanzan 75π m^3 de agua. Si el perímetro de su base es de 10π m, ¿cuál es su altura?

e. Se aplica una rotación en torno al origen en 270º en sentido antihorario sobre el punto $S(-5, 5)$, y sobre su imagen se aplica una reflexión respecto del eje Y. ¿Cuáles son las coordenadas del punto resultante?

4. **Al cuadrilátero $ABCD$ aplícale una rotación en 270º en sentido antihorario con respecto al origen; a su imagen, aplícale una reflexión con respecto al eje X, y al resultado de esta reflexión aplícale una traslación con respecto al vector $\vec{v} = (1, -2)$.**



5. **Observa la siguiente teselación y responde las preguntas.**

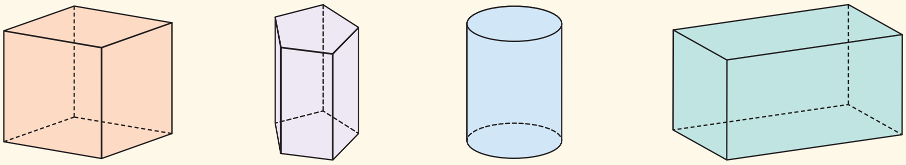


a. ¿Qué figuras geométricas componen la teselación?

b. ¿Por qué es posible realizar la teselación con esas figuras?

c. Construye con regla y compás esta teselación en tu cuaderno.

6. **Dibuja un plano de simetría en los siguientes cuerpos geométricos.**



Cuaderno de Actividades
Páginas 108 y 109.

Reflexiona y responde

- ¿Qué contenido necesitas ejercitar más? ¿Por qué?
- ¿Cómo solucionaste las dificultades que tuviste en el desarrollo de la unidad?

Síntesis y Repaso

Lección 1 Área y volumen de prismas y cilindros

- *Área total (A_T) de un prisma: se suman el área lateral (A_L) con el área de las caras basales (A_B).*

$$A_T = A_L + 2A_B$$

- *Área total (A_T) de un cilindro: se suman el área lateral (A_L) con el área de las caras basales (A_B).*

$$\begin{aligned} A_T &= A_L + 2A_B \\ &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r(h + r) \end{aligned}$$

- *Volumen (V) de un prisma: se calcula el producto del área basal (A_B) por la medida de su altura (h).*

$$V = A_B \cdot h$$

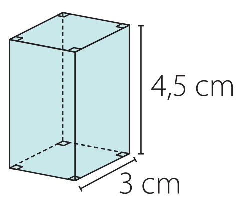
- *Volumen (V) de un cilindro: se calcula el producto del área basal (A_B) por la medida de su altura (h).*

$$V = A_B \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

h: altura del cilindro *r: radio de la base*

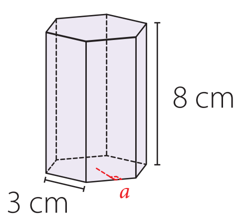
1. Calcula el área basal (A_B), área lateral (A_L) y el área total (A_T) de los siguientes prismas rectos en los cuales su base es un polígono regular.

a.



Base cuadrada.

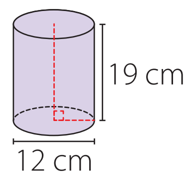
b.



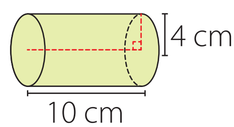
$a = 6{,}2$ cm

2. Calcula el área basal (A_B), área lateral (A_L) y el área total (A_T) de los siguientes cilindros. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

a.

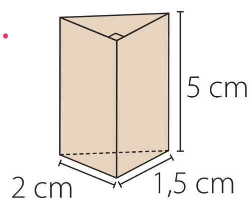


b.

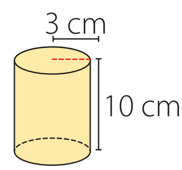


3. Calcula el volumen (V) de los siguientes cuerpos geométricos. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

a.

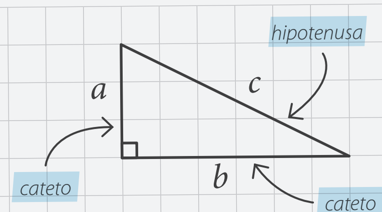


b.



Lección 2 Teorema de Pitágoras

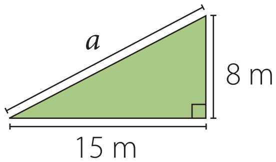
- *En un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras establece que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la medida de hipotenusa.*
  Es decir: $a^2 + b^2 = c^2$



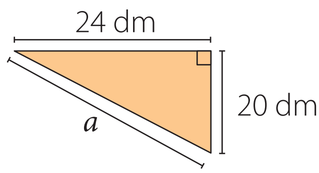
- *Si la medida de tres segmentos cumple la relación del teorema de Pitágoras, entonces estos tres segmentos forman un triángulo rectángulo.*

1. Calcula la medida que falta en cada triangulo rectángulo.

   a.



   b.



2. Determina cuáles de las siguientes medidas corresponden a las de un triángulo rectángulo.
   a. 12 cm, 16 cm y 20 cm
   b. 13 m, 12 m y 10 m

3. La cara frontal de una carpa es un triángulo isósceles cuya base mide 1,6 metros y cada uno de los lados iguales mide 170 centímetros. Calcula la altura en centímetros de esa carpa.

Lección 3 Transformaciones isométricas

Una transformación isométrica es un cambio en la posición de una figura en el plano o en el espacio, sin variar su forma ni su tamaño.

- *Traslación: todos los puntos de una figura se desplazan en una misma magnitud, dirección y sentido. Se puede representar por un vector.*
- *Rotación: todos los puntos de una figura se mueven respecto de un punto fijo o centro en un cierto ángulo de rotación.*
- *Reflexión: a cada punto se le asocia un punto que está a la misma distancia de una recta llamada eje de reflexión.*

1. Dado un triángulo de vértices $A = (-5, -3)$; $B = (2, -1)$ y $C = (1, 4)$. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice si el triángulo ABC se traslada 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba?

2. Dibuja en un plano cartesiano el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 4)$ y aplícale sucesivamente las siguientes transformaciones:
   - Una reflexión respecto del eje X.
   - Una rotación en 90° en sentido horario respecto del origen.
   - Una traslación de acuerdo con el vector de traslación $\vec{v} = (-2, 3)$.

3. Si al punto (–6, –1) se le aplica una traslación $T(4, 3)$ y luego una rotación en 180° con respecto al origen, entonces, ¿cuáles son las coordenadas del nuevo punto?

4. De las siguientes figuras geométricas, ¿cuál(es) de ellas puede(n) teselar (embaldosar) una superficie plana? Justifica tu respuesta.
   - Hexágono regular
   - Pentágono Regular
   - Triángulo equilátero

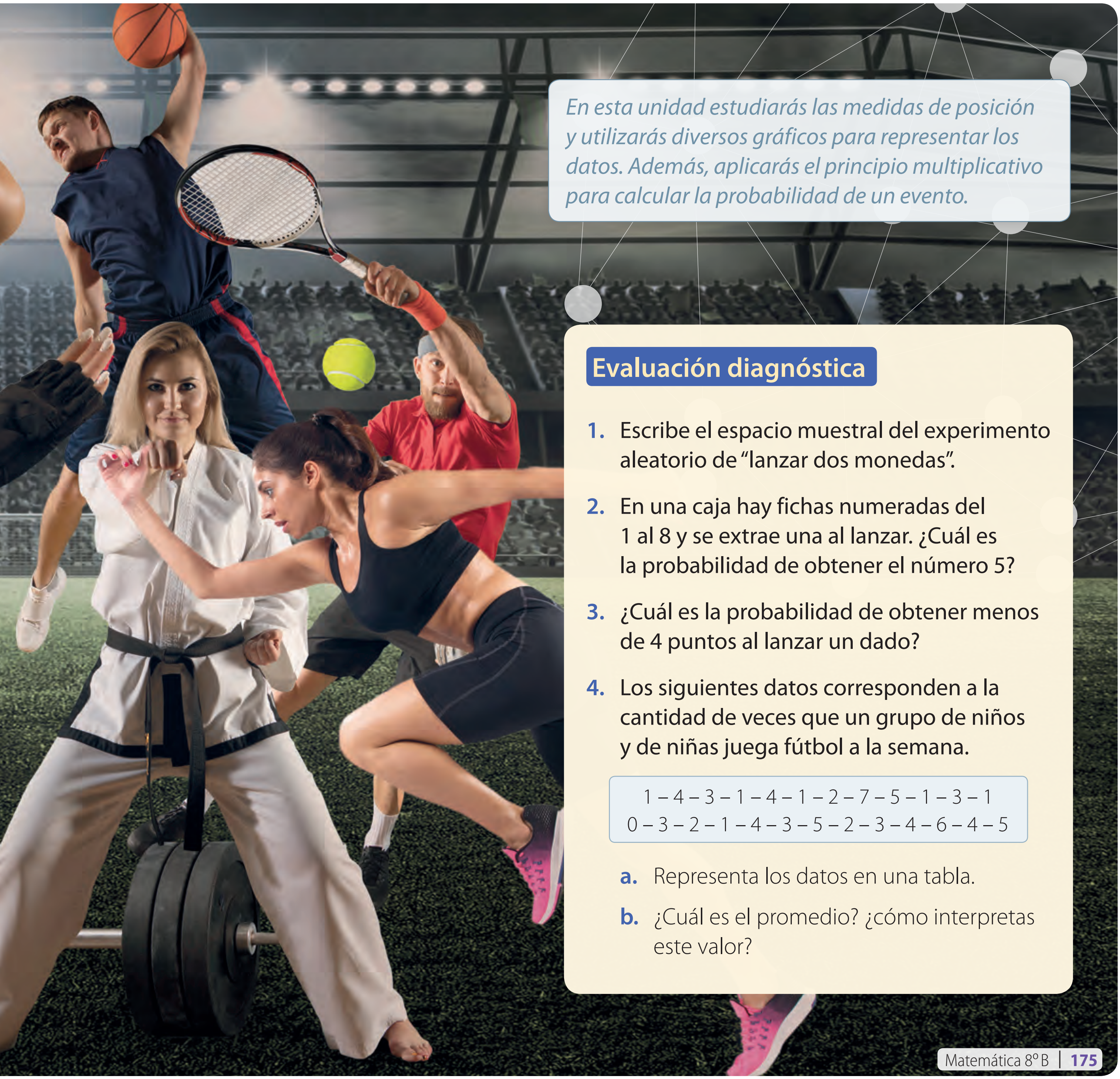
Unidad 4

El deporte

¿Cómo se relacionan la estadística y la probabilidad con el deporte?

Los números juegan un papel cada vez más importante en el deporte. En las competencias la relación con las Matemáticas es palpable, por ejemplo, en las etapas de clasificaciones.

- ¿Cómo puedes decidir cuándo un deportista es mejor que otro?
- ¿Cómo se puede utilizar la estadística en el ámbito del deporte? Da algunos ejemplos.
- ¿Cuál crees que es la probabilidad de marcar un gol el último minuto en un partido de fútbol? Explica.



En esta unidad estudiarás las medidas de posición y utilizarás diversos gráficos para representar los datos. Además, aplicarás el principio multiplicativo para calcular la probabilidad de un evento.

Evaluación diagnóstica

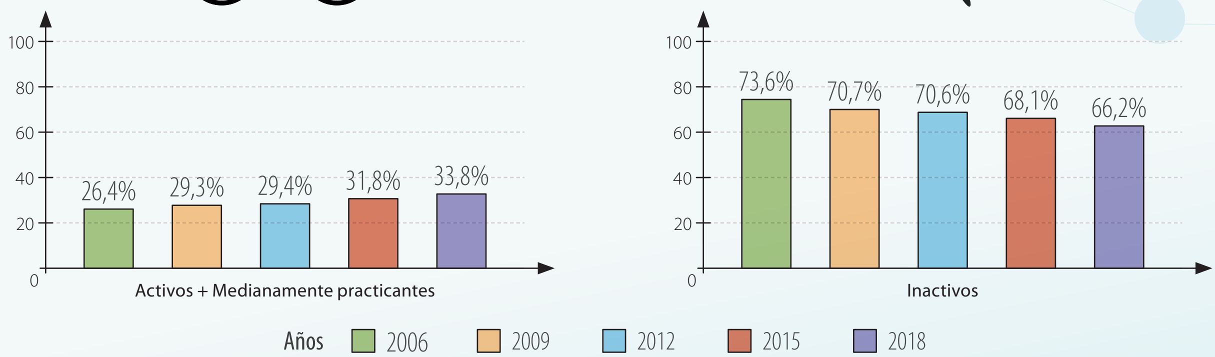
1. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio de “lanzar dos monedas”.
2. En una caja hay fichas numeradas del 1 al 8 y se extrae una al lanzar. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 5?
3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener menos de 4 puntos al lanzar un dado?
4. Los siguientes datos corresponden a la cantidad de veces que un grupo de niños y de niñas juega fútbol a la semana.

   1 – 4 – 3 – 1 – 4 – 1 – 2 – 7 – 5 – 1 – 3 – 1
   0 – 3 – 2 – 1 – 4 – 3 – 5 – 2 – 3 – 4 – 6 – 4 – 5

   a. Representa los datos en una tabla.

   b. ¿Cuál es el promedio? ¿cómo interpretas este valor?

Representaciones gráficas



El gráfico muestra uno de los resultados de la "encuesta nacional de hábitos de actividad física y deporte" encabezada por el Ministerio del Deporte y ejecutada por la Universidad de Concepción.

La encuesta fue aplicada a 6 025 personas de 18 años y más, entre los meses de octubre y noviembre del año 2018.

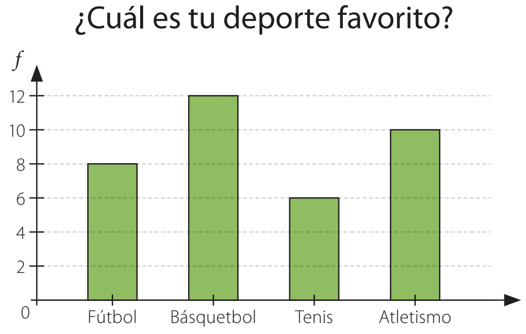
En esta lección trabajarás con las medidas de posición y representarás los datos utilizando diagramas y gráficos.

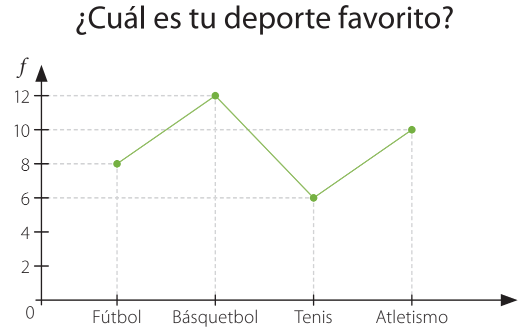
Analiza la información y responde.

- ¿A qué atribuyes el sedentarismo de los chilenos?
- ¿Cuántas horas dedicas semanalmente a realizar actividad física?
- ¿Reconoces la importancia de practicar actividad física? Comenta con tu curso.

Ejemplo 1

Para la creación de los talleres del colegio se les preguntó a los estudiantes cuál es su deporte favorito. Los datos se representaron en los siguientes gráficos.





- ¿Cuál de los gráficos crees que es más adecuado para representar la información anterior?

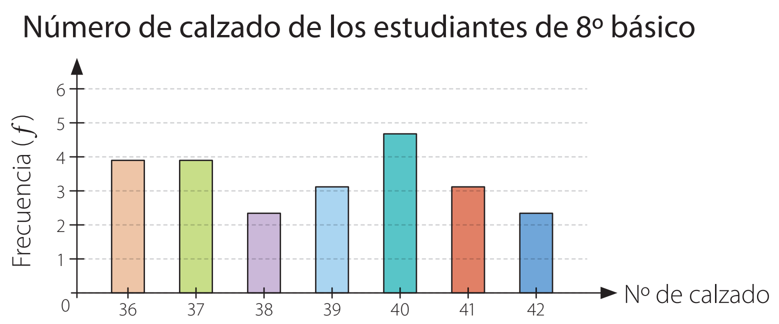
  El gráfico de barras es el más adecuado para representar la información por que permite comparar las frecuencias de las distintas variables.

Aprende

- El **gráfico de barras** se utiliza para comparar las frecuencias de variables cualitativas o cuantitativas. Pueden ser de barras simples o múltiples.
- Los **gráficos de líneas** son representaciones útiles para comunicar información referida a valores numéricos que varían en el tiempo.

Ejemplo 2

Los números de calzado de los estudiantes de un 8° básico se encuentran representados en el siguiente gráfico de barras. Escribe tres conclusiones a partir de él.

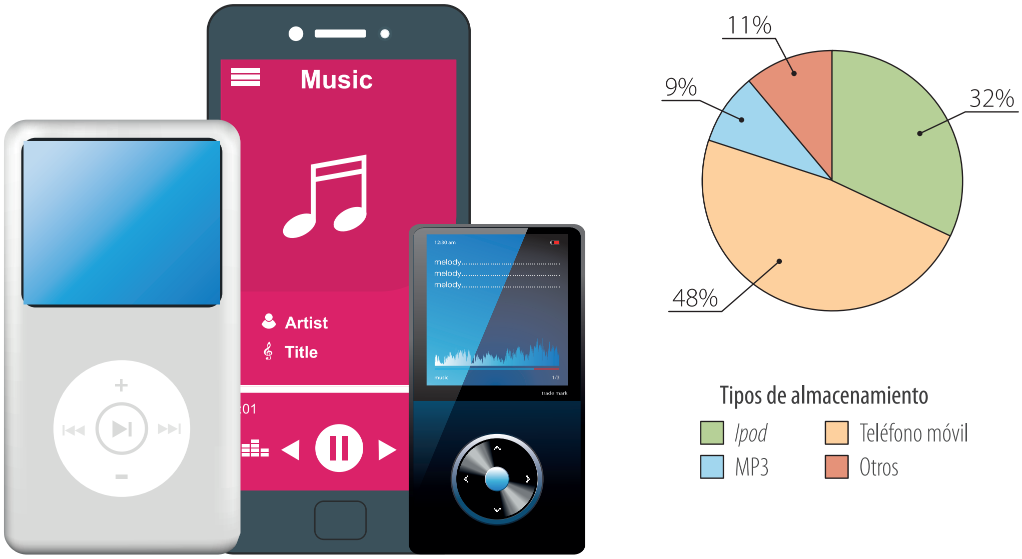


1. Al observar el gráfico, podemos notar que la barra de mayor altura corresponde al número 40. Esto quiere decir que el número de calzado que presenta mayor frecuencia es 40.
2. Del mismo modo, los números de calzado que presentan menor frecuencia son 38 y 42.
3. Hay 30 estudiantes en el 8° básico. Esto se obtiene al sumar la frecuencia de cada número de calzado.

Ejemplo 3

Se realizó una encuesta a 300 estudiantes de un colegio sobre los dispositivos de almacenamiento de música que más utilizan. La información obtenida se representó en el siguiente gráfico.

Dispositivos de almacenamiento
de música



¿Cuántos estudiantes prefieren almacenar su música en un *Ipod* o en un MP3?

1 Calculamos los porcentajes.

$$32\,\%\text{ de }300 = 0{,}32 \cdot 300 = 96\text{ estudiantes.}$$ ← *Ipod*

$$9\,\%\text{ de }300 = 0{,}09 \cdot 300 = 27\text{ estudiantes.}$$ ← MP3

2 Sumamos las cantidades obtenidas.

$$96 + 27 = 123\text{ estudiantes.}$$ ← Cantidad de estudiantes que guardan su música en un *Ipod* o en un MP3.

Aprende

- En un **gráfico circular**, cada sector representa un valor de la variable expresado como un porcentaje. En general, este tipo de gráficos se utilizan para saber cómo se comporta una variable respecto de un todo.
- El **histograma** es un gráfico formado por barras contiguas, donde cada una representa un intervalo de valores. Sirve para expresar información sobre datos que están agrupados. El **polígono de frecuencias** se obtiene uniendo los puntos correspondientes a la marca de clase de cada intervalo (punto medio del intervalo).

Ejemplo 4

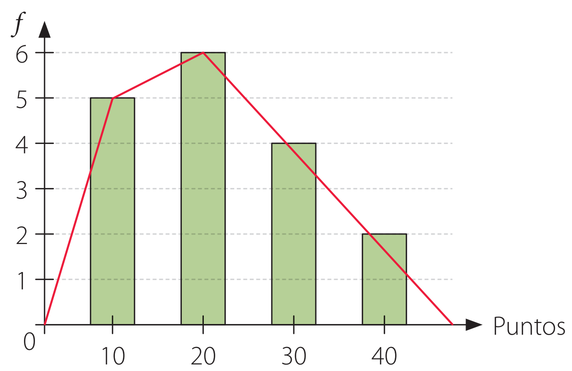
En la siguiente tabla se muestran los puntos obtenidos por un grupo de estudiantes en una prueba. Construye el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente a los datos.

Puntos obtenidos en una prueba	
Puntos	f
[10, 20[	5
[20, 30[	6
[30, 40[	4
[40, 50]	2

- El intervalo [30, 40[corresponde a todos los números mayores o iguales a 30 y menores que 40, es decir, se incluye el 30, pero no el 40.
- El intervalo [40, 50] corresponde a todos los números mayores o iguales a 40 y menores o iguales que 50, es decir, se incluyen 40 y 50.

1. En los ejes coordenados marcamos las frecuencias en el eje vertical, y los intervalos en el horizontal.
2. Sobre cada intervalo dibujamos barras cuya altura corresponde a la frecuencia.
3. Para realizar el polígono de frecuencias unimos con una línea poligonal las marcas de clase de cada intervalo.

Puntos obtenidos en una prueba



Aprende

Para construir un **gráfico circular** debes trazar una circunferencia y marcar con un punto su centro. Luego dibujas su radio y a partir de él trazas los ángulos adyacentes, que corresponden a cada uno de los porcentajes encontrados. Cada ángulo a lo puedes calcular mediante la expresión:

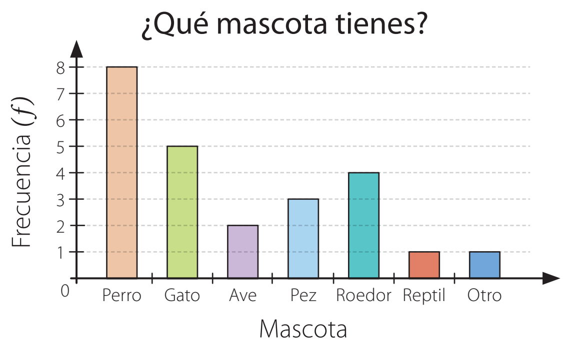
$$\alpha = \frac{f \cdot 360^\circ}{n}$$

donde n es el total de datos y f la frecuencia absoluta de cada dato.

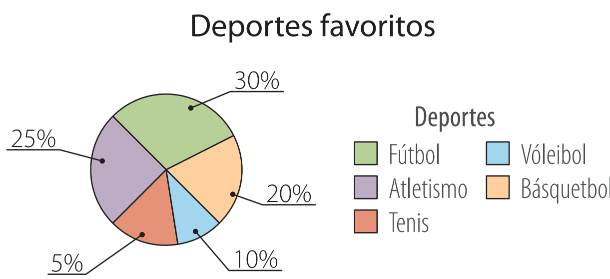
Actividades

1. **Lee las siguientes situaciones y determina qué tipo de gráfico realizarías para representarlas y explica en cada caso tu elección.**
   - **a.** El porcentaje de computadores vendidos durante los últimos 5 años.
   - **b.** Las comidas preferidas por un grupo de personas.
   - **c.** La cantidad de aviones que despegan de un aeropuerto entre las 7:00 y las 21:00 horas.
   - **d.** La cantidad de asistentes a las películas que están en cartelera.
   - **e.** El porcentaje de nacimientos en un hospital entre enero y julio.
   - **f.** El porcentaje de refrigeradores vendidos durante los últimos 6 meses.

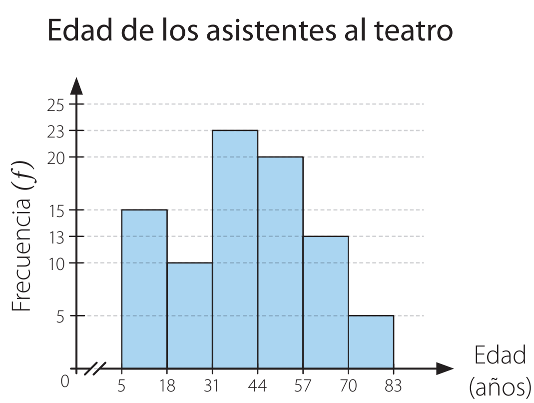
2. **Observa las siguientes representaciones gráficas y luego responde.**
   - **a.** El gráfico representa las respuestas de un grupo de estudiantes a la siguiente pregunta: ¿Qué mascota tienes? ¿Cuántos estudiantes tienen como mascota un gato o un roedor?



   - **b.** El gráfico representa los deportes favoritos de un grupo de jóvenes.
     - Si 165 jóvenes prefieren el fútbol, ¿cuántos prefieren el vóleibol?
     - ¿Cuántos jóvenes prefieren el atletismo o el tenis?
     - ¿Cuántos jóvenes fueron encuestados?



   - **c.** Durante una obra de teatro se registra la edad de los asistentes y se representa en el siguiente histograma.
     - ¿Qué intervalo de edad presenta mayor frecuencia?
     - ¿Qué intervalo de edad presenta menor frecuencia?
     - La entrada de los menores de edad tiene un precio de $ 5 000, los adultos menores de 70 años pagan $ 10 000 y a partir de los 70 años cancelan $ 7 500. ¿Cuánto dinero se recaudó por entradas?
     - ¿Cuántas personas de menos de 44 años asistieron a la obra de teatro?



3. **Analiza las siguientes preguntas y luego responde. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.**

a. ¿Qué semejanzas hay entre un gráfico de barras y un histograma?, ¿y en qué se diferencian?

b. ¿Qué diferencias hay entre un gráfico de barras y un gráfico de líneas?, ¿y en qué se asemejan?

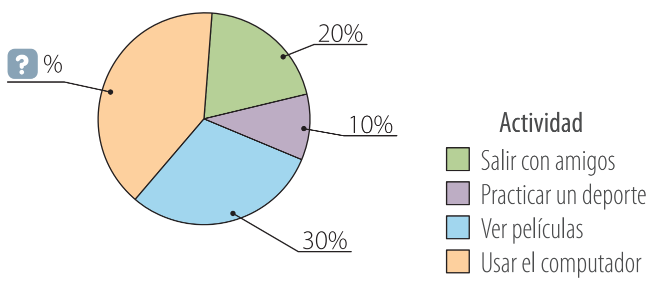
c. ¿Cuándo es útil representar la información en un gráfico circular?

4. **En un colegio se hizo una encuesta a un grupo de estudiantes acerca de qué actividad prefieren realizar en su tiempo libre.**

a. Copia la tabla y el gráfico en tu cuaderno considerando los datos faltantes en cada caso.

Actividad preferida	
Actividad	f
Salir con amigos	?
Practicar un deporte	?
Ver películas	?
Usar el computador	?
Total	150

Actividad preferida



b. Construye un gráfico de barras con la información.

c. ¿Cuántos de los encuestados prefieren salir con amigos o practicar un deporte? ¿Es cierto que no alcanzan a ser un tercio del total de encuestados? Justifica.

d. ¿Es verdad que más de la mitad de la cantidad de encuestados prefieren usar el computador o ver películas?

5. **Construye un gráfico de líneas y un gráfico de barras que represente la siguiente situación y luego responde.**

En la tabla se muestra la cantidad de juguetes vendidos durante 5 meses en una tienda.

Juguetes vendidos en una tienda					
Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
Cantidad de juguetes	80	65	50	60	75

¿Qué gráfico consideras que es el adecuado para representar la situación? Justifica.

Cuaderno de Actividades
Páginas 110 a 113.

Reflexiona y responde

- ¿Qué aprendiste? ¿Cómo lo aprendiste?
- ¿En qué situaciones puedes aplicar estos conocimientos?
- ¿Cuáles son las principales diferencias y semejanzas entre las representaciones gráficas trabajadas?

Medidas de posición

Ruta

Es una especialidad del ciclismo, en que el deportista junto con su máquina recorre distancias urbanas y rurales en forma individual y grupal.

Pista

Es una especialidad del ciclismo, que se practica en una pista o velódromo que puede tener distintas medidas, 500, 333, 250 o 200 metros.

BMT

Especialidad del ciclismo que tiene lugar en terrenos montañosos o en aquellos que presentan una orografía similar, con pendientes y rutas sinuosas.

BMX

El BMX se originó a comienzos de los años 1970 en California. Cuando los jóvenes intentaban imitar a los campeones de motocross con sus bicicletas.

- ¿Qué sabes del ciclismo? ¿Qué te parece este tipo de deporte? Comenta con tu curso.
- Lee la siguiente información y luego responde.
  - La estatura, en centímetros, de los seleccionados de un grupo de ciclistas son:

    160, 168, 164, 170, 162, 166, 172, 164,
    168, 164, 162, 160, 168, 170, 160, 162

  - ¿Cuál es el dato mayor y cuál el dato menor?
  - Ordena los datos de menor a mayor y encierra los valores que dividen al conjunto de datos en 4 grupos con igual cantidad de elementos.

Ejemplo 1

Los siguientes datos son los puntajes obtenidos en relación con una prueba de admisión a una empresa.

100 - 121 - 134 - 123 - 142 - 118 - 123 - 142 - 126 - 127 - 131 - 98 - 116

Si para postular a la empresa se debe estar sobre el 50 % de los mejores puntajes de todos los que rindieron la prueba, ¿cuál es el puntaje de corte?

1. Debemos calcular Q_2, por lo que ordenamos los datos de forma creciente.

98 - 100 - 116 - 118 - 121 - 123 - 123 - 126 - 127 - 131 - 134 - 142 – 142

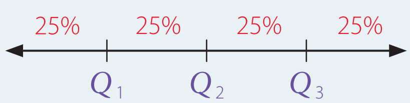
2. Identificamos el puntaje que divide a los datos en dos partes iguales.

98 - 100 - 116 - 118 - 121 - 123 - $\boxed{123}$ - 126 - 127 - 131 - 134 - 142 – 142

3. El dato encerrado es el valor de Q_2, el cual separa el 50 % de los datos de la distribución, por lo tanto para postular a la empresa se debe obtener un puntaje superior a 123.

Aprende

Una de las **medidas de posición** son los **cuartiles** (Q_k, con $k = 1, 2, 3$), que corresponden a tres valores que dividen una distribución de datos en cuatro partes iguales.



Para calcular el cuartil Q_k se deben ordenar los n datos en forma creciente y calcular $\frac{n \cdot k}{4}$.

- Si resulta un número entero, Q_k es igual al promedio entre el dato que se ubica en esa posición y el dato siguiente.
- Si resulta un número decimal, Q_k es igual al dato que ocupa la posición $\left[\frac{n \cdot k}{4}\right] + 1$.

Ejemplo 3

Se quiere seleccionar a un grupo de estudiantes para competir en las olimpiadas de atletismo. Las marcas (en metros) obtenidas por los estudiantes en una prueba son las siguientes:

52,4 - 56,3 - 57,5 - 65,3 - 65,3 - 66,5 - 66,8 - 67,9 - 68,7
69,3 - 70,2 - 71,4 - 72,4 - 74,7 - 74,9 - 75,5 - 75,6

Si se selecciona el 90 % de las mejores marcas, ¿cuántos estudiantes no fueron seleccionados?

1. Debemos calcular P_{10}, ya que los estudiantes no seleccionados equivalen al 10 %.

$$P_{10} = \frac{17 \cdot 10}{100} = \frac{170}{100} = 1{,}7$$

Como 1,7 es un número decimal, calculamos $[1{,}7] + 1 = 1 + 1 = 2$.

2. Como los datos ya están ordenados de forma creciente, identificamos aquel dato que ocupa la posición 2.

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Dato	52,4	56,3	57,5	65,3	65,3	66,5	66,8	67,9	68,7	69,3	70,2	71,4	72,4	74,7	74,9	75,5	75,6

3. Luego, el valor de P_{10} corresponde a 56,3, por lo tanto 2 estudiantes no fueron seleccionados.

Aprende

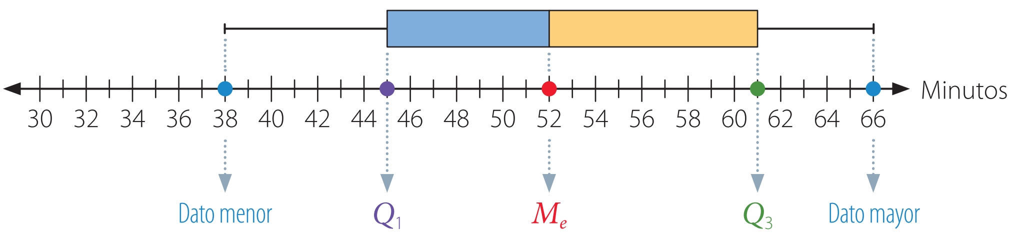
Los **percentiles** (P_k, con $k = 1, 2, 3, \ldots, 99$) corresponden a los 99 valores de una distribución que la dividen en 100 partes iguales. La diferencia entre dos percentiles consecutivos corresponde al 1 % de la distribución.

Para calcular el percentil P_k se deben ordenar los n datos en forma creciente y calcular $\frac{n \cdot k}{100}$.

- Si resulta un número entero, P_k es igual al promedio entre el dato que se ubica en esa posición y el dato siguiente.
- Si resulta un número decimal, P_k es igual al dato que ocupa la posición $\left[\frac{n \cdot k}{100}\right] + 1$.

Ejemplo 4

Los minutos que tardaron los estudiantes en responder un examen están representados en el siguiente diagrama.



¿Al cabo de cuántos minutos el 50 % de los estudiantes terminó de contestar el examen? ¿Cuántos minutos tardaron en contestar el examen todos los estudiantes?

1. La mediana separa el 50 % de los datos, por lo tanto a los 52 minutos la mitad de los estudiantes termina el examen.
2. Para determinar el tiempo que tardaron en responder el examen todos los estudiantes basta que observemos el dato mayor de la distribución de datos. Es decir, tardaron 66 minutos en responder el examen.

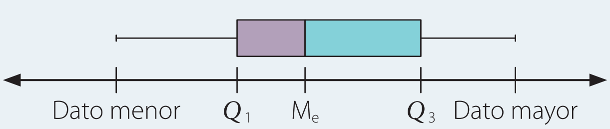
- Un **diagrama de cajón** es una representación que permite visualizar algunas características de la población a partir de las medidas de tendencia central y de posición.

Aprende

Para **construir un diagrama de cajón** se traza una recta graduada a partir de los datos y se construye un rectángulo (cajón) cuyos extremos deben estar ubicados sobre Q_1 y Q_3.

Así, la medida del largo de la caja es $Q_3 - Q_1 = Ric$, donde Ric corresponde al **recorrido intercuartil o rango intercuartil**, es decir, a la variabilidad de los datos con respecto a la mediana (Me).

Dentro del cajón se traza una línea vertical en el lugar de la mediana (Me); de esta manera, se divide el conjunto de datos en dos partes porcentualmente iguales. Luego, se trazan dos líneas, a ambos lados del cajón, desde sus extremos hasta los valores del dato menor y del mayor de la distribución.



Al observar un diagrama de cajón es posible obtener conclusiones respecto de la distribución de la variable en estudio. Si uno de los cajones tiene mayor área, quiere decir que los datos que se ubican entre determinados cuartiles están más dispersos.

Ejemplo 3

Las notas obtenidas por los estudiantes de dos 8° básicos en una evaluación son las siguientes:

Notas 8° A	6,5 - 5,2 - 7,0 - 4,8 - 3,5 - 5,8 - 6,6 - 3,7 - 4,5 - 5,2 - 6,3 - 7,0 - 5,5 - 6,5 4,9 6,8 - 5,6 - 5,5 - 5,8 - 6,0 - 5,5 - 4,8 - 4,2 - 5,9 - 7,0 - 6,4 - 4,0 - 4,0
Notas 8° B	5,4 - 5,4 - 7,0 - 6,8 - 3,4 - 4,8 - 6,2 - 3,8 - 5,5 - 6,2 - 6,6 - 6,0 - 5,0 - 6,4 3,8 - 3,8 - 6,6 - 5,7 - 5,5 - 7,0 - 6,5 - 5,8 - 3,2 - 5,5 - 6,6 - 6,8 - 7,0 - 3,2

Construye un diagrama de cajón para cada distribución de datos.

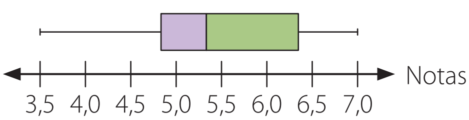
1. Determinamos los valores necesarios para construir el diagrama de cajón correspondiente a cada curso.

8° A	
Dato menor	3,5
Dato mayor	7,0
Primer cuartil	4,8
Mediana	5,55
Tercer cuartil	6,45
Recorrido intercuartil	1,65

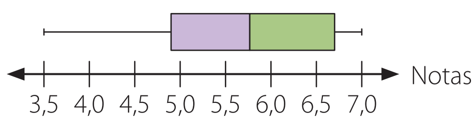
8° B	
Dato menor	3,2
Dato mayor	7,0
Primer cuartil	4,9
Mediana	5,75
Tercer cuartil	6,6
Recorrido intercuartil	1,7

2. Construimos los diagramas de cajón.

Notas 8° A



Notas 8° B



Actividades

1. Calcula las medidas de posición pedidas para cada distribución de datos.

a. 2 - 3 - 5 - 6 - 7 - 9 - 10 - 11 - 13

Calcula Q_1, Q_2, y Q_3.

b. 4 - 6 - 8 - 17 - 23 - 43 - 53 - 56

Calcula Q_1, Q_2, y P_{50}.

c. 50 - 52 - 53 - 55 - 56 - 58 - 61 - 62 - 64

Calcula P_{20}, P_{50} y P_{80}.

d. 1,2 - 3,4 - 5,6 - 7,9 - 10,2 - 7,8

Calcula P_{10}, Q_3, y P_{75}.

e. 16 - 15 - 28 - 20 - 17 - 9 - 11 - 24

Calcula P_{10}, Q_3, y P_{35}.

f. 100 - 102 - 103 - 100 - 106 - 110 - 100

Calcula Q_1, P_{12} y P_{92}.

2. **Analiza cada situación y luego calcula las medidas de posición solicitadas.**

a. Una empresa realizó una encuesta a 80 personas para conocer la cantidad de horas diarias que ven televisión. Los resultados fueron los siguientes.

Cantidad de horas	1	2	3	4
f	4	15	16	45

Calcula Q_1, Q_2, P_{50}, Q_3, P_{75}, P_{80} y P_{99}.

b. Se aplicó una prueba a un grupo de estudiantes de octavo básico. Los resultados fueron los siguientes.

Puntos	75	88	90	95	100	105	110
f	6	6	9	18	10	11	15

Calcula Q_1, Q_2, Q_3, P_{10}, P_{60} y P_{90}.

3. **Analiza cada situación y luego responde.**

a. Los datos corresponden a la cantidad de automóviles que transitan por un peaje, ubicado en las afueras de la ciudad, durante las últimas dos semanas.

192 - 168 - 206 - 232 - 230 - 243 - 145 - 194 - 227 - 173 - 183 - 158 - 154 - 176 - 181

¿Cuál es el valor del primer cuartil de los datos?, ¿y del tercer cuartil?

b. A un grupo de estudiantes se les preguntó acerca de la cantidad de hermanos que tiene cada uno. Las respuestas fueron las siguientes:

2 - 3 - 1 - 4 - 5 - 2 - 1 - 2 - 3 - 2 - 1 - 4 - 5 - 2 - 1 - 3 - 2 - 1 - 2 - 3 - 2 - 3 - 4

¿Cuántos estudiantes se ubican bajo el segundo cuartil? ¿Cuántos hermanos tienen?

c. El equipo de gimnasia artística de un colegio elaboró una encuesta acerca de la estatura (en metros) de sus integrantes. Los resultados fueron los siguientes. ¿Cuántos estudiantes se ubican sobre el percentil 80? ¿Cuál es su estatura?

1,57 - 1,55 - 1,67 - 1,72 - 1,71 - 1,67 - 1,60 - 1,63 - 1,51 - 1,55
1,60 - 1,62 - 1,69 - 1,49 - 1,63 - 1,50 - 1,70 - 1,47 - 1,56 - 1,61

4. **Lancen 24 veces un dado y anoten los resultados obtenidos. Luego, respondan las siguientes preguntas.**

a. ¿Qué puntaje se obtiene en el 25 % o menos de los lanzamientos?

b. ¿Qué puntaje se obtiene en el 75 % o más de los lanzamientos?

5. **Los datos corresponden a la cantidad de mascotas que tienen los 25 estudiantes de un curso.**

Cantidad de mascotas	1	2	3	4	5	6
f	2	7	10	3	2	1

¿Es posible afirmar que el 50 % de los estudiantes del curso tiene 2 mascotas o menos? Justifica.

6. **Reúnete con un compañero o compañera y resuelvan el siguiente problema.**

En una empresa de mensajería se asigna un presupuesto diario para la gasolina que gastan en sus motos los 10 mensajeros que trabajan allí. El gerente de operaciones le plantea al tesorero que el dinero presupuestado no alcanza, pues el 85 % de los mensajeros gastaron más de lo asignado. El gasto en combustible de la semana anterior se registra a continuación.

Mensajero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gasto ($)	24 000	23 000	21 000	28 000	26 000	24 500	21 800	27 000	23 400	22 300

a. ¿Cuál fue el presupuesto asignado por mensajero?

b. ¿Qué medida de posición usarías para calcular este valor?

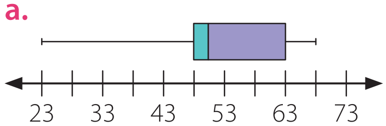
c. ¿Qué significado tiene el valor del percentil 15 en este caso?

7. **En un laboratorio se está experimentando con una bacteria benigna que se pretende usar en la elaboración de un nuevo medicamento. A continuación se muestran los tiempos, en minutos, de reproducción de 25 cultivos de esta bacteria. Calcula el percentil 80 e interpreta este valor.**

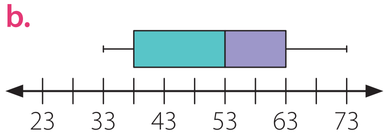
60 - 47 - 82 - 95 - 88 - 77 - 39 - 90 - 63 - 68 - 64 - 58
94 - 55 - 89 - 72 - 50 - 92 - 90 - 77 - 86 - 58 - 78 - 86 - 44

8. **Identifica en cada diagrama de cajón los valores de Q_1, Q_3, Me, Ric, el dato menor y el dato mayor de la distribución de datos.**

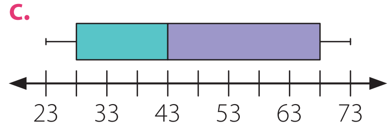
a.



b.



c.



9. **Los siguientes datos corresponden a las masas corporales, en kilogramos, de los integrantes de un equipo de fútbol.**

70 - 75 - 80 - 75 - 70 - 78 - 78 - 70 - 80 - 75 - 78 - 80
75 - 74 - 70 - 74 - 75 - 75 - 74 - 75 - 75 - 71 - 70 - 78

Construye un diagrama de cajón para la distribución de datos.

Cuaderno de Actividades
Páginas 114 a 119.

Reflexiona y responde

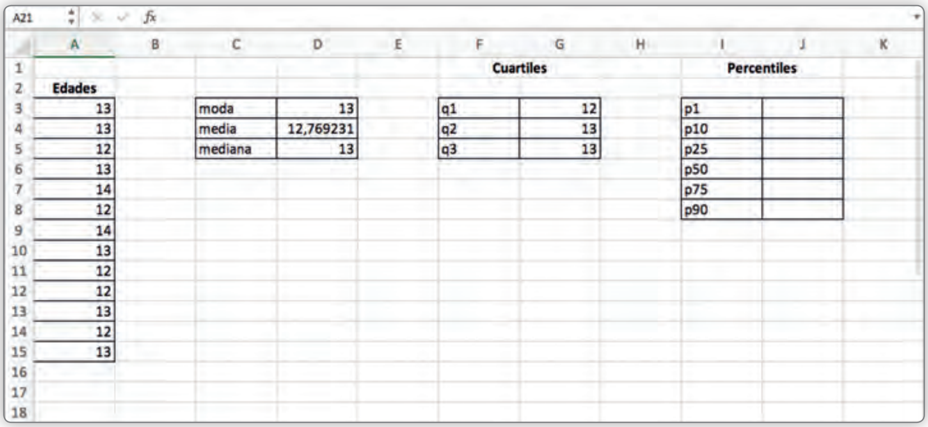
- Al calcular medidas de posición, ¿cuál crees que es el error más frecuente de cometer?, ¿qué puedes hacer para no cometerlo?
- ¿Piensas que intercambiar opiniones con tus compañeros aporta a tu aprendizaje?, ¿por qué?

Herramientas tecnológicas

En esta actividad usarás una planilla de cálculo para simular el lanzamiento de un dado.

Sigue las instrucciones.

1. En una hoja de cálculo escribe en la celda **A2** "Edades", luego en la misma columna **A** escribe las edades de 13 de tus compañeros y compañeras.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1						Cuartiles			Percentiles		
2	Edades										
3	13		moda	13		q1	12		p1		
4	13		media	12,769231		q2	13		p10		
5	12		mediana	13		q3	13		p25		
6	13								p50		
7	14								p75		
8	12								p90		
9	14										
10	13										
11	12										
12	12										
13	13										
14	12										
15	13										

2. En la celda **C3** escribe moda, en la celda **C4** escribe media, y en la celda **C5** escribe mediana.

3. En la celda **F3** escribe q1, en la celda F4 escribe q2, y en la celda f5 escribe q3.

4. En la celda **I3** escribe p1, en la celda **I4** escribe p10, en la celda **I5** escribe p25, en la celda **I6** escribe p50, en la celda **I7** escribe p75 y en la celda **I8** escribe p90.

Celda	Fórmula	¿Qué hace?
D3	=MODA(A3:A15)	Calcula la moda
D4	=PROMEDIO(A3:A15)	Calcula le media
D5	=MEDIANA(A3:A15)	Calcula la mediana
G3	=CUARTIL(A3:A15;1)	Calcula el cuartil 1
G4	=CUARTIL(A3:A15;2)	Calcul el cuartil 2
G5	=CUARTIL(A3:A15;3)	Calcula el cuartil 3
J3	=PERCENTIL(A3:A15;0,01)	Calcula el percentil 1
J4	=PERCENTIL(A3:A15;0,01)	Calcula el percentil 10
J5	=PERCENTIL(A3:A15;0,25)	Calcula el percentil 25
J6	=PERCENTIL(A3:A15;0,5)	Calcula el percentil 50
J7	=PERCENTIL(A3:A15;0,75)	Calcula el percentil 75
J8	=PERCENTIL(A3:A15;0,9)	Calcula el percentil 90

5. Luego, en tu cuaderno construye el diagrama de cajón que representa la situación.

Evaluación Lección 1

1. **Un grupo de pasajeros espera en el aeropuerto la salida de su avión. Este hará varias escalas antes de llegar a París (Francia): San Pablo (Brasil), Madrid (España) y Barcelona (España).**
   Los destinos de los pasajeros se muestran en la siguiente tabla:

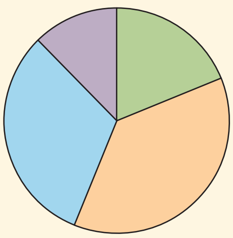
Tabla 1 Destinos del grupo de pasajeros

Ciudad	San Pablo	Madrid	Barcelona	París
Cantidad de pasajeros	18	6	15	9

   a. Construye una tabla que contenga con los porcentajes de pasajeros que se dirigen a cada uno de los lugares señalados.
   b. ¿Cuál de los gráficos circulares representa correctamente los datos de la Tabla 1?

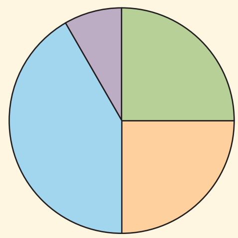
Destinos del grupo de pasajeros

Gráfico 1



Destinos del grupo de pasajeros

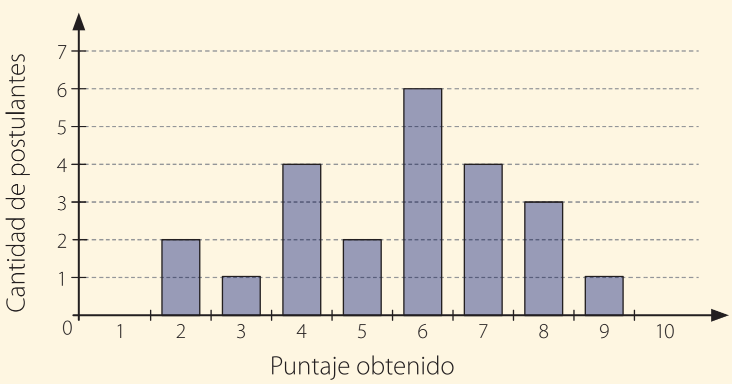
Gráfico 2



   c. ¿Es correcto afirmar que más de la mitad de los pasajeros va a España? ¿Por qué?
   d. Construye un gráfico de barras con la información de la Tabla 1.

2. **Una empresa de informática otorgará becas de estudio a los interesados en profundizar sus conocimientos en programación. Para seleccionar a los beneficiados, aplicó un test de conocimientos y habilidades en el tema. Los puntajes de los postulantes se representan en el gráfico de barras que está a continuación:**

Puntaje en el test de los postulantes a la beca



a. Calcula los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3 de los puntajes del test.

b. Construye un diagrama de cajón para la distribución de los puntajes del test.

c. Si la empresa pide como requisito para dar la beca que el postulante se encuentre sobre el percentil 70 de los puntajes del test, ¿cuántos de ellos obtendrán la beca?

d. A los postulantes que no accedieron a la beca, pero que obtuvieron un puntaje igual o superior al segundo cuartil, la empresa les dará la oportunidad de repetir el test. ¿Cuántos de los que rindieron el test cumplen con este requisito y podrán repetir la prueba?

3. Construye un diagrama de cajón con cada grupo de datos y plantea conclusiones.

Datos correspondientes a la cantidad de animales que tiene un grupo de campesinos en cada uno de sus predios.

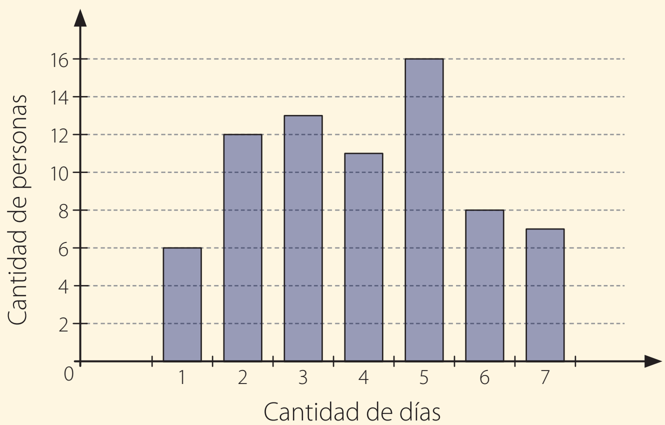
24 - 28 - 40 - 30 - 20 - 65 - 30 - 20

40 - 15 - 23 - 18 -16 - 20 - 30 - 40

20 - 30 - 18 - 20

4. Analiza la información entregada en el siguiente gráfico, construye el diagrama de cajón respectivo y establece conclusiones.

Cantidad de días a la semana que un grupo de personas realiza actividad física.



Cuaderno de Actividades
Páginas 120 y 121.

Reflexiona y responde

- Lo que has aprendido sobre estadística, ¿con qué conocimientos previos lo puedes relacionar?
- ¿Qué dificultades tuviste en el desarrollo de la lección? ¿Cómo las pudiste superar?

Lección 2 Probabilidades

Principio multiplicativo

Para poder participar en un torneo de tenis, la pareja de dobles debe sortear las siguientes rondas para llegar a la final del campeonato: 1.ª ronda, cuartos de final, semifinal y final.

En esta lección podrás aplicar el principio multiplicativo para calcular la probabilidad de un evento compuesto y representar los resultados usando diagramas o tablas.

Organiza un campeonato de básquetbol con 8 equipos, en donde ocurra una eliminación doble. De acuerdo a esto responde:

- ¿Cuántos partidos debe jugar un equipo para coronarse campeón?
- ¿Qué probabilidad tiene cada equipo de ganar el campeonato?

Ejemplo 1

Marcelo tiene 3 camisetas (roja, verde y azul) y 2 pantalones (negro, café). ¿De cuántas formas distintas puede escoger Marcelo una chaqueta con un pantalón?

1. Determinamos los siguientes conjuntos:

   A: Los tipos de camiseta.

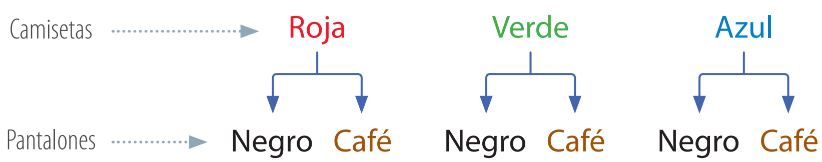
   B: Los tipos de pantalón.

- La **cardinalidad** de un conjunto A ($\#A$) corresponde a la cantidad de elementos contenidos en él.

2. Calculamos la cardinalidad de cada conjunto.

$$\#A = 3 \qquad \#B = 2$$

3. Hay 6 maneras de combinar los elementos de los conjuntos, ya que por el principio multiplicativo podemos calcular el producto entre la cantidad de elementos de cada conjunto, es decir, $3 \cdot 2 = 6$. Lo anterior lo podemos visualizar en un diagrama de árbol.



Aprende

- El **principio multiplicativo** es una técnica de conteo en la que si un conjunto está compuesto por n_1 elementos, otro conjunto por n_2 elementos, y así sucesivamente con k conjuntos diferentes, entonces la cantidad de maneras de combinar los elementos de los conjuntos es:

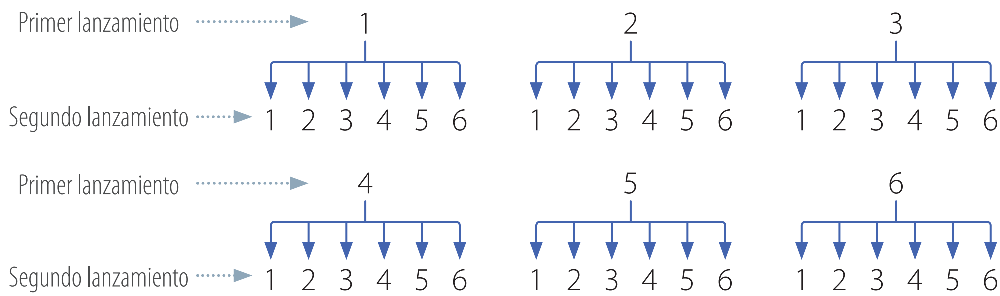
$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

- El **diagrama de árbol** es una representación gráfica que permite mostrar los resultados posibles al aplicar el principio multiplicativo.

Ejemplo 2

Al lanzar un dado de seis caras dos veces, ¿cuál es la cantidad de resultados posibles?

1. Para determinar la cantidad de resultados posibles, utilizaremos un diagrama de árbol, en el cual se escriben de forma ramificada los elementos de cada lanzamiento.



2. Podemos observar que cada camino corresponde a una combinación posible, por ejemplo, (1, 1) o (2, 3). Todas las combinaciones posibles también se pueden representar en una tabla.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

3. Por lo tanto, la cantidad de combinaciones son 36, ya que en cada lanzamiento hay 6 posibles resultados (1, 2, 3, 4, 5 y 6) y son 2 lanzamientos, es decir, $6 \cdot 6 = 36$.

Ejemplo 3

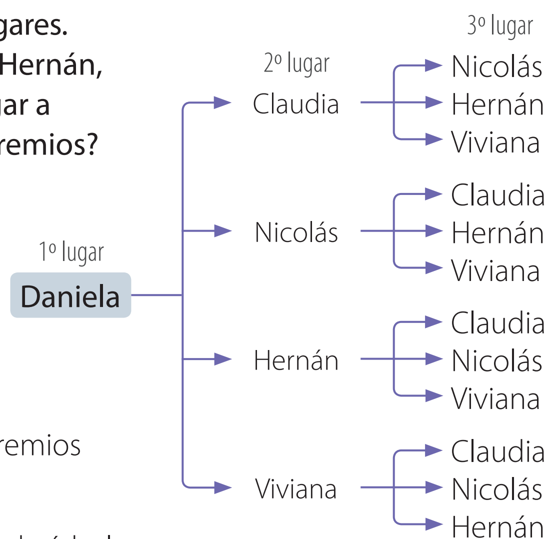
En un festival se otorgan premios a los tres primeros lugares. Quedaron seleccionadas 5 personas: Claudia, Nicolás, Hernán, Viviana y Daniela. Si los jueces otorgaron el primer lugar a Daniela, ¿de cuántas formas se podrían entregar los premios?

1. Determinamos la cantidad de elementos de cada conjunto.

   A: Primer lugar $\quad \#A = 1$
   B: Segundo lugar $\quad \#B = 4$
   C: Tercer lugar $\quad \#C = 3$

2. La cantidad de formas que se pueden entregar los premios está dado por: $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$.

3. Las combinaciones las podemos ver en un diagrama de árbol.



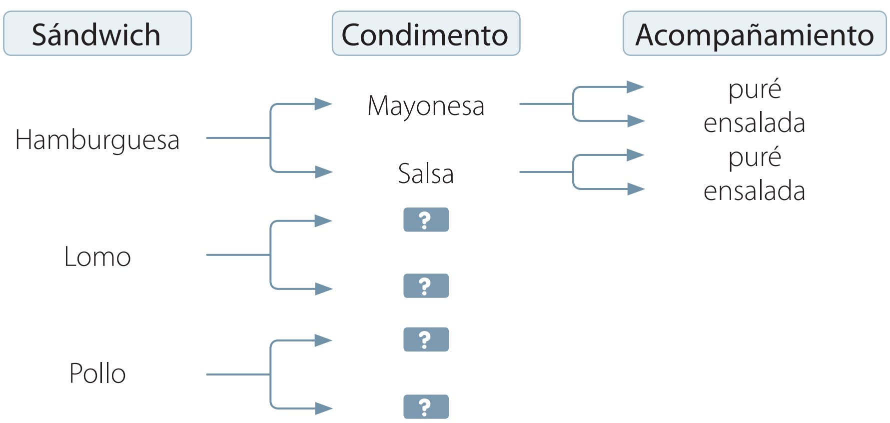
Actividades

1. Determina si en las siguientes situaciones se puede utilizar el principio multiplicativo.

- **a.** Luis quiere viajar a una ciudad pasando por cinco lugares. Puede llegar a cada uno en bus, tren o avión. ¿De cuántas formas puede llegar Luis a la ciudad?
- **b.** Tomar una ficha de una urna donde se encuentran tres fichas de diferente color.
- **c.** Lanzar un dado cuatro veces consecutivas y observar el resultado de cada lanzamiento.
- **d.** En la final de fútbol del campeonato de un colegio hay cuatro equipos que se disputan el primer y segundo lugar (campeón y subcampeón). ¿De cuántas maneras diferentes los equipos pueden ubicarse en dichos lugares?
- **e.** Lanzar una moneda cinco veces y observar los resultados.
- **f.** Sacar tres bolitas, en forma consecutiva, de una bolsa en la que hay 3 bolitas azules, 2 verdes, 4 rojas y una blanca.

2. En un restaurante se pueden armar distintos menús formados por un sándwich, un condimento y un acompañamiento.

- **a.** Completa en tu cuaderno el diagrama de árbol con todos los menús posibles.

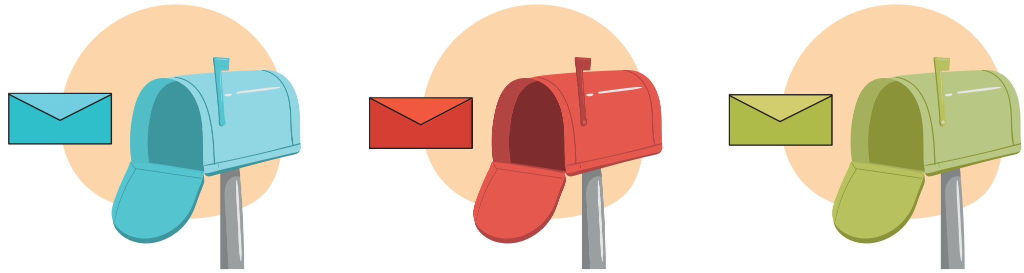


- **b.** ¿Cuántos menús de los que escribiste tendrán puré como acompañamiento?
- **c.** ¿Cuántos menús tendrán mayonesa y puré?

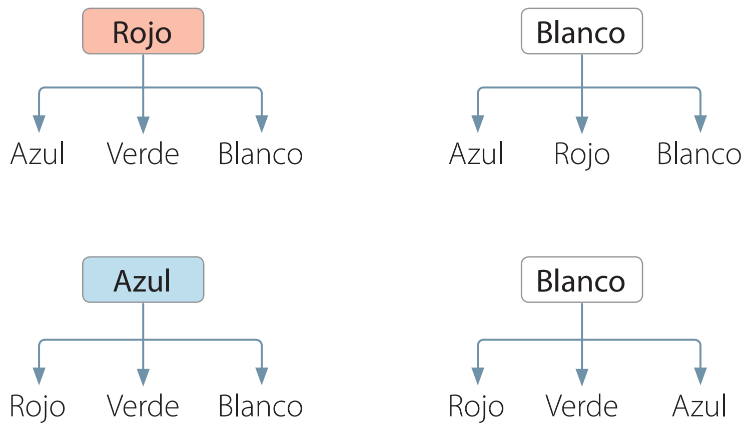
3. Calcula la cantidad de combinaciones posibles en cada una de las siguientes situaciones y represéntalas mediante un diagrama de árbol.

- **a.** Un médico general clasifica a sus pacientes de acuerdo con su sexo (masculino o femenino) y por su tipo de sangre (A, B, AB, O).
- **b.** Patricia y sus amigas fueron a comprar jugos. Al pedirlos les dieron las siguientes posibilidades: tamaño del vaso: grande y pequeño, sabores del jugo: naranja, mango y manzana, además, colores del vaso: rojo, amarillo o verde.
- **c.** Claudia tiene 2 blusas, una azul y otra verde. Además, tiene 3 faldas: una roja, una negra y otra violeta.

4. ¿Cuántas posibilidades distintas hay de ubicar los sobres uno en cada buzón? Dibuja un diagrama de árbol que represente la situación.



5. Observa el siguiente diagrama de árbol.



a. Realiza un listado con los posibles resultados representados en el diagrama de árbol.

b. Escribe una situación que pueda modelarse con la información.

6. Por seguridad, Andrés cambia mensualmente la clave de su cuenta de ahorros. Para esto, utiliza todas las combinaciones de cuatro números que puede realizar con los dígitos del 0 al 3, de modo que en cada clave no se repite ninguno. En estas condiciones, ¿cuántos meses pasa Andrés sin repetir ninguna clave?

7. Dos amigas se mandan mensajes secretos usando estos símbolos:

a. ¿Cuántos mensajes se pueden formar que tengan 7 símbolos, todos distintos?

b. De todos los mensajes que calculaste, ¿cuántos empiezan con ★ y terminan con ♥?

c. ¿Cuántos mensajes se pueden armar que tengan 4 símbolos, todos diferentes?

d. ¿Cuántos mensajes se pueden armar que tengan 3 símbolos si estos se pueden repetir?

8. **Para un campeonato de ciclismo se necesita determinar el orden en que irán los deportistas en la fila. Los seleccionados son Mauricio, Boris, Diego y Fabián.**

a. Construye un diagrama de árbol que represente la situación.

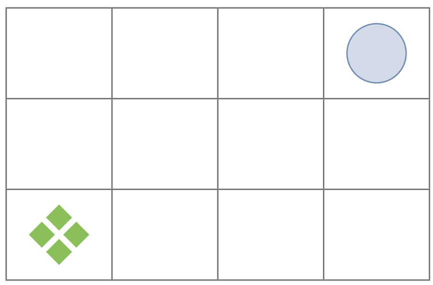
b. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ubicar a los deportistas?

c. Si Boris siempre debe ir en el primer lugar, ¿de cuántas formas se pueden ordenar?

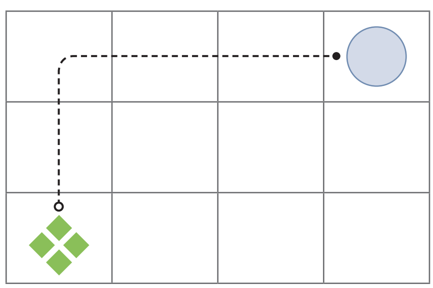
d. El entrenador dice que al ubicar a Boris y a Mauricio siempre en los dos primeros puestos genera la misma cantidad de formaciones que si los ubica siempre en los últimos dos puestos. ¿Está en lo correcto el entrenador? Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

9. **Lee la información y luego responde. Guíate por el ejemplo.**

En el siguiente diagrama, para ir de la posición inicial (❖) a la posición final (○) hay que hacer un recorrido moviéndose a la derecha (D) o hacia arriba (A) sucesivamente.



Ejemplo: un recorrido posible es $AADDD$:



a. ¿Cuántos recorridos distintos se pueden realizar? Represéntalos usando un diagrama.

b. ¿Cuántos de los recorridos comienzan con el movimiento hacia la derecha?

c. ¿En cuántos de los recorridos el último movimiento es hacia arriba?

Cuaderno de Actividades
Páginas 122 a 125.

Reflexiona y responde

- Explica en qué consiste el principio multiplicativo.
- ¿Crees que es útil representar datos en un diagrama de árbol?, ¿por qué?
- ¿Cómo aporta a tu aprendizaje respetar las opiniones de tus compañeros y compañeras?

Cálculo de probabilidades

Antes de iniciar un partido de vóleibol el primer árbitro realiza un sorteo en presencia de los capitanes de ambos equipos.

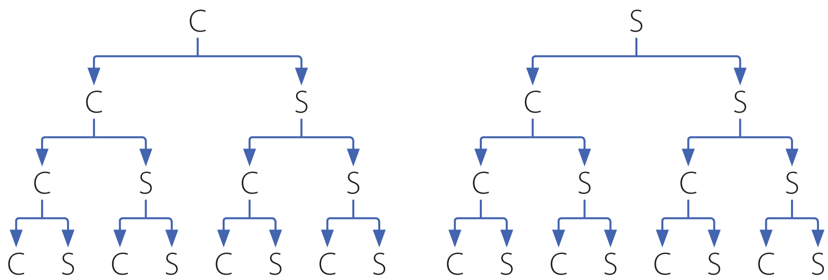
Para el sorteo se utiliza una moneda que es lanzada al aire. Quien eligió la cara de la moneda que aparece hacia arriba es el ganador del sorteo y es él quien decide el derecho a sacar o recibir el saque o el lado del campo.

- En un partido de vóleibol, ¿cuál es la probabilidad que tiene un equipo de hacer el saque inicial del juego?
- ¿Qué otro deporte utiliza una moneda para determinar quién inicia el juego? Averigua y luego comenta con tu curso.

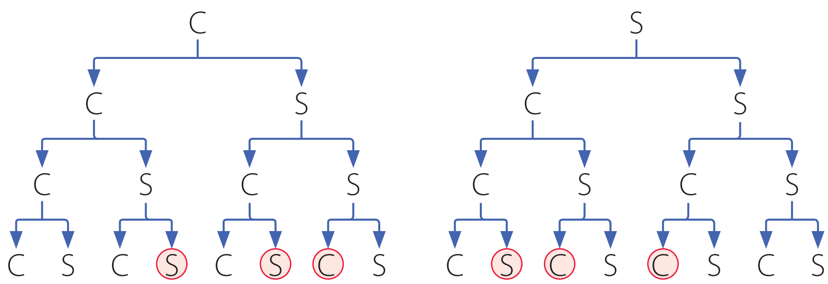
Ejemplo 1

En el experimento aleatorio de lanzar cuatro monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener solo dos caras?

1. Determinamos el espacio muestral del experimento. Para eso, podemos construir un diagrama de árbol donde la cantidad de elementos es igual a 16.



2. Si el suceso A consiste en que en solo dos de las monedas se obtenga cara, entonces la cantidad de elementos de A es 6. En el diagrama lo podemos ver de la siguiente manera:



3. Finalmente, calculamos la probabilidad usando la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

4. La probabilidad de obtener solo dos caras al lanzar 4 monedas es de $\frac{3}{8}$, de 0,375 o de un 37,5 %.

Aprende

Si en un experimento aleatorio todos los resultados posibles son equiprobables y el espacio muestral es finito, entonces se puede calcular la probabilidad de ocurrencia mediante la regla de Laplace.

La **regla de Laplace** establece que la probabilidad de ocurrencia de un suceso A es el cociente entre la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Ejemplo 2

¿Cuál es la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 al lanzar un dado de seis caras?

1 Determinamos el espacio muestral (Ω) y el suceso de obtener un múltiplo de 3.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \#\Omega = 6$$
$$A = \{3, 6\} \qquad \#A = 2$$

2 Calculamos la probabilidad de obtener un múltiplo de 3.

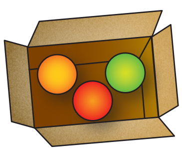
$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Aprende

- Se dice que dos sucesos son equiprobables si tienen la misma probabilidad de ocurrencia.
- La probabilidad de un suceso se puede expresar como una fracción, como un número decimal o como un porcentaje. Por ejemplo, la probabilidad de obtener una cara al lanzar una moneda es de 0,5 o de $\frac{1}{2}$ o de un 50 %.

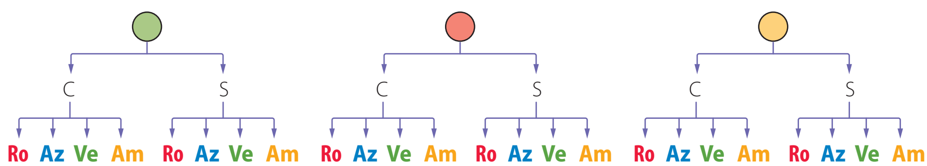
Ejemplo 3

Un experimento aleatorio consiste en extraer al azar una bolita de una caja, luego lanzar una moneda y finalmente girar una ruleta.



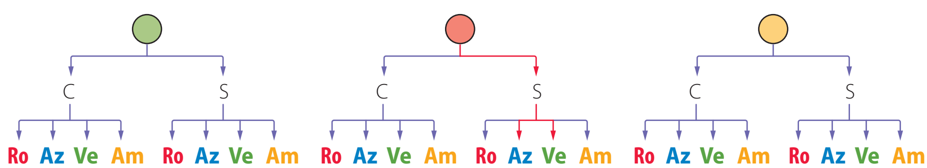
¿Cuál es la probabilidad de obtener una bolita roja, un sello en la moneda y obtener el color verde o azul en la ruleta?

1 Representamos la situación con un diagrama de árbol.



Podemos observar que la cantidad de combinaciones posibles es igual a 24.

2 Sea A: obtener una bolita roja, un sello en la moneda y obtener el color verde o azul en la ruleta.



3 Finalmente, calculamos la probabilidad: $P(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Actividades

1. **Identifica los casos favorables para cada suceso.**
   - **a.** Obtener un número primo al extraer una bolita de las 30 numeradas del 1 al 30 de una tómbola.
   - **b.** Obtener una vocal al extraer una tarjeta de una caja con las letras de la palabra destino.
   - **c.** Obtener un múltiplo de 4 al sumar los puntajes de las caras superiores al lanzar dos dados.

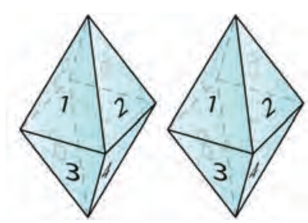
2. **Calcula la probabilidad de cada suceso teniendo en cuenta el experimento aleatorio de lanzar dos monedas.**
   - **a.** En las dos monedas se obtiene cara.
   - **b.** En la segunda moneda se obtiene sello.
   - **c.** En la primera moneda se obtiene cara y en la segunda sello.

3. **Una baraja de naipe inglés tiene 52 cartas en total, separadas en cuatro pintas: diamante, corazón, trébol y pica. Si se escoge una carta al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**
   - **a.** A: obtener un diamante.
   - **b.** B: obtener un número 3.
   - **c.** C: no obtener un número 10.
   - **d.** D: obtener una carta de pinta roja.

4. **Escribe el espacio muestral del experimento «suma de puntos al lanzar dos dados». Y luego, responde las preguntas.**
   - **a.** ¿De cuántas maneras distintas se puede obtener una suma igual a 2?
   - **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 12?

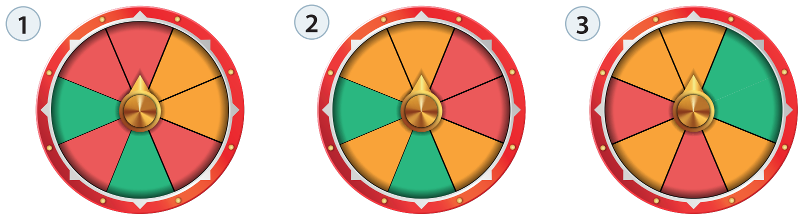
5. **En una caja hay 15 bolitas iguales numeradas del 1 al 15 y se extrae una al azar. Ordena los sucesos del menos probable al más probable.**
   - **a.** A: obtener un número primo.
   - **b.** B: obtener un número impar.
   - **c.** C: obtener un múltiplo de 7.
   - **d.** D: obtener un número menor que 15.

6. **Se lanzan dos dados de 8 caras. Calcula las siguientes probabilidades.**
   - **a.** Obtener números iguales en ambos dados.
   - **b.** Obtener un punto en cada dado.
   - **c.** Obtener un número par de puntos en un dado y un número primo en el otro.



7. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer girar cada una de las ruletas se obtenga el color verde?



b. Una secretaria tiene que guardar tres cartas en sus sobres. Si guarda al azar una carta en cada uno de los sobres, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos, una de las cartas vaya en el sobre que le corresponde?

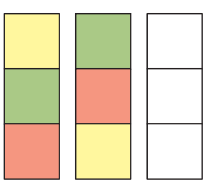
c. Eduardo tiene un dado con doce caras numeradas del 1 al 12, como el de la imagen. Juega con Mario así: si al arrojarlo se obtiene un número primo en la cara superior, gana Eduardo, y si sale un múltiplo de 4, gana Mario. ¿Los dos tienen las mismas posibilidades de ganar? Anota con qué números gana cada uno de ellos.

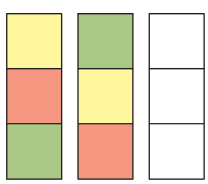
d. ¿En qué situación la probabilidad de un suceso es 1?, ¿y cuándo la probabilidad de un suceso es 0? Es posible que un suceso tenga probabilidad 1,5?, ¿por qué? Comenta tus respuestas con tus compañeros.

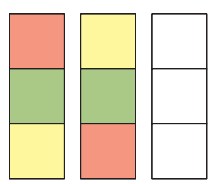
e. Andrés y Juan son hermanos y quieren decidir a dónde irán de vacaciones. Para ello, Juan propone lanzar dos monedas. Si se obtiene una cara y un sello Andrés escogerá el lugar. Si se obtienen dos caras o dos sellos, Juan elegirá. Andrés dice quen esto es injusto porque Juan tiene más posibilidades de ganar. Juan le dice que ambos tienennla misma posibilidad de ganar o perder. ¿Cuál de los hermanos crees que está en lo correcto? Justifica tu respuesta.

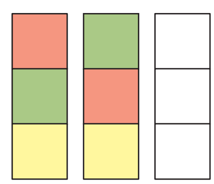
8. **Analiza la siguiente información y luego responde.**

En un juego caen al azar tres series de fichas cuadradas: una verde, una amarilla y otra roja. Para ganar, deben alinearse tres fichas del mismo color de forma horizontal o en diagonal. En cada situación, ¿qué probabilidad hay de ganar cuando caiga la tercera serie de fichas?

a. 

b. 

c. 

d. 

Cuaderno de Actividades
Páginas 126 a 129.

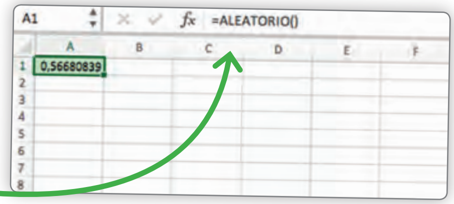
Reflexiona y responde

- ¿Qué conocías acerca del cálculo de probabilidades?, ¿qué sabes ahora?
- ¿En qué situaciones cotidianas puedes usar estos contenidos?

Herramientas tecnológicas

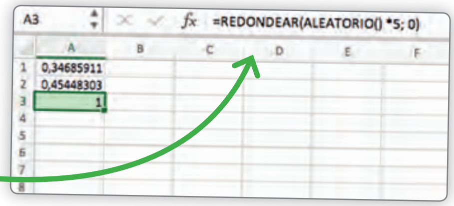
En esta actividad deberás usar una planilla de cálculo para simular el lanzamiento de un dado. Sigue las instrucciones que se presentan a continuación.

1. En una hoja de cálculo escribe en la celda **A1** la función **=ALEATORIO()**. Esta función creará un número decimal aleatorio entre 0 y 1. Cada vez que hagas un cambio en la hoja de cálculo, generará un nuevo número.



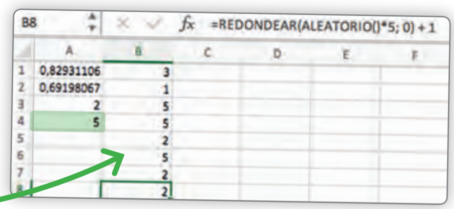
2. Queremos obtener un número entre 1 y 6, que son las posibilidades de un dado. Escribe en la celda **A2** la función **=ALEATORIO()*5**. Al escribir esta función, el número que se cree estará multiplicado por 5, por lo que el número generado es un decimal entre 0 y 5.

3. Para quitar la parte decimal, escribe en otra celda la función: **=REDONDEAR(ALEATORIO() *5; 0)**. El primer argumento de la función es el número que queremos redondear (el número generado aleatoriamente) y el segundo argumento, el número de decimales al que queremos que se redondee ese número (0 decimales). Se obtendrán números enteros desde el 0 al 5.



4. Para que los posibles números vayan desde el 1 al 6, basta escribir en la celda **A4** la función **=REDONDEAR(ALEATORIO()*5; 0) + 1**. Esta función le suma 1 a cada número generado aleatoriamente.

5. Copia esta función desde la celda **B1** hasta la celda **B20**.



Responde

1. **Luego de realizar los pasos anteriores, construye en tu cuaderno una tabla de frecuencias para esta situación y responde:**
   - **a.** ¿Cuál es la frecuencia relativa cuando el número del dado es 3?, ¿cuál es la probabilidad de que salga 3?, ¿se relacionan ambos valores?
   - **b.** ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?, ¿los resultados son equiprobables?, ¿por qué?
   - **c.** En una nueva planilla repite el mismo procedimiento hasta las celdas B50 y C100. ¿Qué sucede con la frecuencia relativa y la probabilidad en cada caso?, ¿qué puedes concluir?

Evaluación Lección 2

1. **Representa los siguientes experimentos aleatorios utilizando diagramas de árbol.**

a. El lanzamiento de tres monedas.

b. El lanzamiento de dos dados de seis caras.

c. El lanzamiento de una moneda y un dado de seis caras.

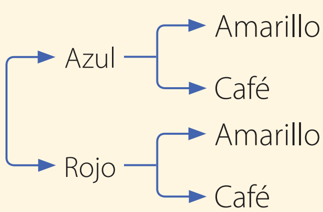
d. El género de las siguientes 4 personas que entrarán en una tienda de música.

e. La elección de un libro de ciencias y uno humanista de entre 5 de ciencias y 3 humanistas.

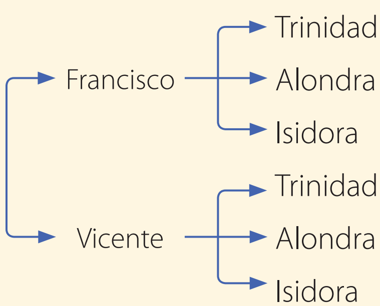
f. La elección de un menú entre 3 entradas y 6 platos de fondo.

2. **Para cada representación de experimentos aleatorios plantea un problema a resolver.**

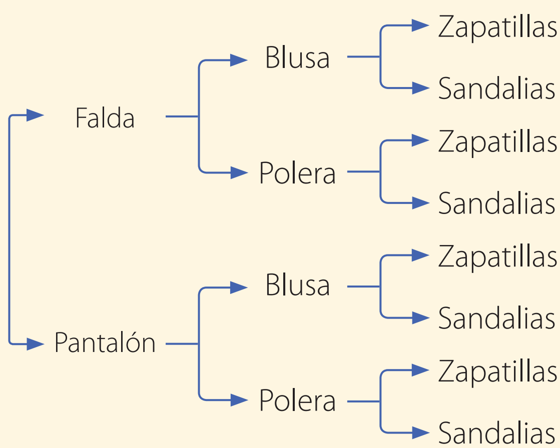
a.



b.



c.



3. **Analiza la siguiente situación y luego responde.**

Se lanzarán dos dados al aire y se sumarán los puntos que se obtengan en sus caras superiores.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener como suma 8 puntos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener menos de 5 puntos como suma?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener como suma más de 9 puntos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener números iguales en ambos dados?

e. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener como suma un número mayor que 10?

f. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor que 2?

4. **Analiza la siguiente situación, represéntala y luego responde.**

Se lanzarán cinco monedas al aire y se observará el resultado obtenido.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 caras?

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 sellos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello?

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener como máximo 3 caras?

e. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos sellos exactamente?

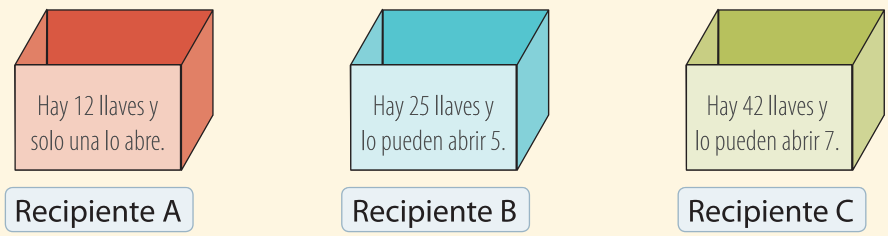
f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara y 4 sellos?

5. **Con los dígitos 3, 6, 7, 8 y 9 se formarán números de tres cifras distintas.**

a. ¿Cuántos números diferentes se pueden formar?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea par?

6. **¿Qué recipiente conviene elegir al extraer al azar una llave y que esta abra el candado?**



7. **En un restaurante, el menú incluye 4 tipos de entrada, 3 posibilidades de platos de fondo y 2 postres diferentes.**

a. ¿Cómo armarías tu menú?

b. ¿De cuántas maneras distintas crees que se puede elegir el menú?

Menú

Entradas
- *Sopa de verduras*
- *Sopa de pollo*
- *Ensalada surtida*
- *Palta reina*

Plato de fondo
- *Arroz con carne*
- *Fetuchini*
- *Pastel de verduras*

Postres
- *Ensalada de frutas*
- *Flan*

Cuaderno de Actividades
Páginas 130 y 131.

Reflexiona y responde

- ¿Qué entiendes por probabilidad? Explica.
- ¿Cómo compartiste tus ideas y puntos de vista con tus compañeras y compañeros?

Evaluación final

1. **Interpreta la información entregada en el siguiente gráfico y luego responde.**

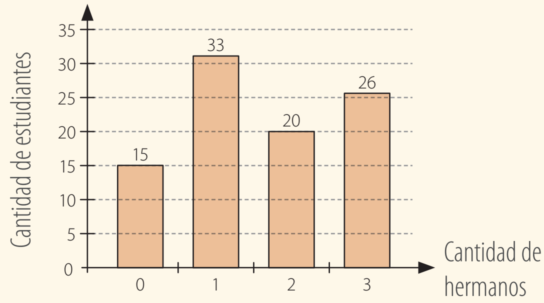
En el gráfico se muestran los resultados de una encuesta realizada a un grupo de estudiantes acerca de la cantidad de hermanos que tienen.

a. ¿A cuántos estudiantes se encuestó?

b. ¿Cuántos estudiantes tienen 2 hermanos?

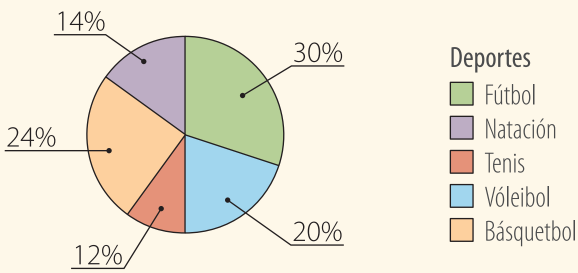
c. ¿Qué porcentaje de los estudiantes tiene menos de 2 hermanos?

Cantidad de hermanos de un grupo de estudiantes



2. **El gráfico circular corresponde a las preferencias de un grupo de 150 estudiantes, ¿cuántos no prefieren el fútbol?**

Deportes preferidos



3. **Analiza la situación y luego responde.**

Los siguientes datos corresponden a las estaturas en centímetros de los participantes de un torneo de karate.

145 - 155 - 168 - 178 - 170 - 170 - 168 - 170 - 158 - 168 - 158 - 188 - 190 - 168 - 165 - 159
172 - 145 - 188 - 185 - 156 - 195 - 188 - 175 - 162 - 145 - 154 - 175 - 164 - 160 - 178 - 184
182 - 175 - 169 - 167 - 170 - 175 - 168 - 176 - 174 - 150 - 175 - 148 - 167 - 164 - 169 - 174

a. ¿Cuál es el valor del percentil 70?

b. ¿Cuál es el valor de Q_3? ¿Cuál es su interpretación?

c. Si se considera en una de las competencias al 25 % de los competidores de menor estatura, ¿hasta qué estatura se podría participar en esta categoría?

d. Construye un diagrama de cajón con los datos.

e. Si con el 35% de los que tienen mayor estatura se realizará una competencia especial, ¿sobre qué estatura se elegirá a los participantes?

4. Las patentes de automóviles constan de 4 letras y 2 dígitos. Considera que las condiciones que se deben cumplir en cada patente son las siguientes:

- No se pueden utilizar vocales.
- No se pueden utilizar las letras M, N, Ñ ni Q.
- El primer número no puede ser cero.

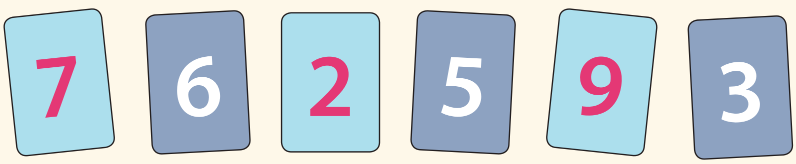
a. Determina una expresión para calcular cuántas patentes distintas se pueden construir.

b. ¿Cuántas patentes terminan con un dígito impar?

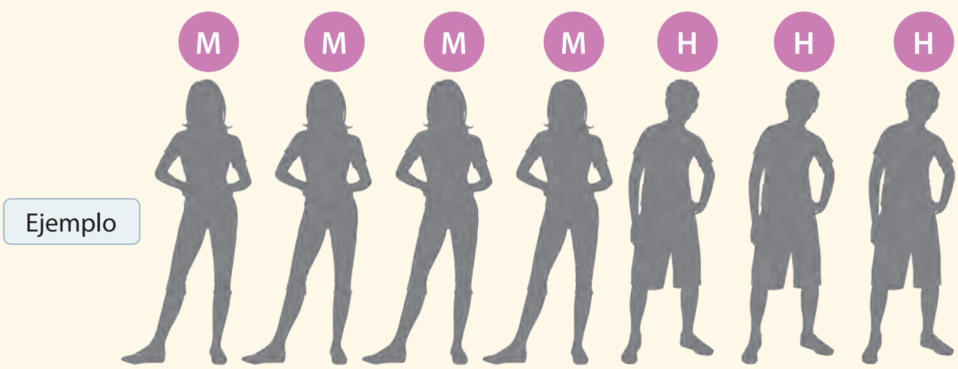
c. ¿Cuántas patentes tienen todas sus letras iguales?

5. Un 4° medio está confeccionando un polerón que puede ser de color rojo, verde o azul. Puede también tener o no tener gorro y puede ser con cierre o sin cierre. ¿Cuántos diseños distintos de polerón hay?

6. Se escriben los dígitos 2, 5, 3, 6, 7 y 9, cada uno en una tarjeta. ¿Cuál es la probabilidad de que al ordenarlas una al lado de la otra se forme un número impar?



7. Un grupo musical compuesto por 4 mujeres y 3 hombres se sacará una foto para la cual sus integrantes se dispondrán al azar uno al lado del otro. ¿Cuál es la probabilidad de que al ordenarse queden todos los hombres juntos y todas las mujeres juntas?



Cuaderno de Actividades
Páginas 132 y 133.

Reflexiona y responde

- ¿Crees que debes repasar algún contenido?, ¿por qué?
- ¿Pudiste solucionar las dificultades que hayas tenido en el desarrollo de la unidad?

Síntesis y Repaso

Lección 1 Estadística

Los gráficos permiten representar los datos para comparar las frecuencias de los valores, analizar cómo se comporta una variable y comunicar dicha información.

- *Los gráficos de barras se utilizan para comparar las frecuencias de variables cualitativas o cuantitativas.*
- *Los histogramas son gráficos formados por barras contiguas, en que cada una representa un intervalo de valores. Sirve para expresar información sobre datos que están agrupados.*
- *Los gráficos de líneas permiten representar variables cuantitativas que varían en el tiempo.*
- *Los gráficos circulares se emplean para mostrar información que se expresa en porcentajes o razones respecto de un total, que se representa por el círculo completo.*

Las medidas de posición dividen una distribución ordenada en grupos con la misma cantidad de datos.

- *Para calcular el cuartil Q_k se deben ordenar los n datos en forma creciente y calcular $\frac{n \cdot k}{4}$.*

  – *Si resulta un número entero, Q_k es igual al promedio entre el dato que se ubica en esa posición y el dato siguiente.*
  – *Si resulta un numero decimal, Q_k es igual al dato que ocupa la posición; $\left[\frac{n \cdot k}{4}\right] + 1$.*

1. **Analiza cada variable e indica qué gráfico crees que es el más adecuado para representarla. Justifica tu respuesta.**

a. Temperaturas registradas cada 1 hora durante un día en una ciudad.

b. Resultados de las elecciones de presidente de curso en el 8° básico de un colegio.

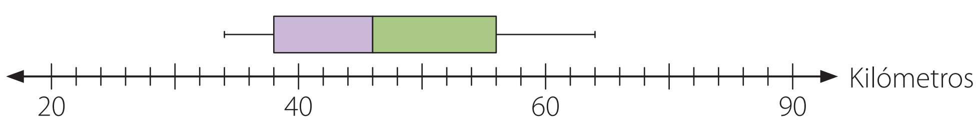
c. Estatura de los estudiantes de 8° básico de la región de Arica y Parinacota.

2. **Los siguientes datos corresponden a las edades de los participantes de un taller de pintura de la comuna.**

16 - 16 - 23 - 37 - 18 - 16 - 18 - 21 - 32 - 41 - 27 - 37 - 33
21 - 19 - 26 - 35 - 40 - 31 - 23 - 16 - 30 - 24 - 36 - 34

Calcula e interpreta los valores de Q_1, Q_2, P_{70} y P_{90}.

3. **En el diagrama de cajón se representa la distribución de las distancias de un puerto a las localidades cercanas a él.**



a. ¿Cuál es la distancia de la ciudad que se encuentra más cerca del puerto?

b. ¿Cuál es el valor del tercer cuartil? ¿Cuál es su interpretación?

Lección 2 Probabilidad

- *El **principio multiplicativo** es una técnica de conteo en la que, si un conjunto está compuesto por n_1 elementos, otro conjunto por n_2 elementos, y así sucesivamente con k conjuntos diferentes, entonces la cantidad de maneras de combinar los elementos de los conjuntos es:*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

- *El **diagrama de árbol** es una representación gráfica que permite mostrar los resultados posibles al aplicar el principio multiplicativo.*
- *Si en un experimento aleatorio todos los resultados posibles son **equiprobables**, entonces se puede calcular la probabilidad de ocurrencia mediante la regla de Laplace.*
- *La **regla de Laplace** establece que la probabilidad de ocurrencia de un suceso A es el cociente entre la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos posibles.*

$$P(A) = \frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos posibles}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

1. **Un juego consiste en lanzar un dado de seis caras. Si se obtiene un número par, se lanza otra vez el dado. Si se obtiene un número impar, se lanza dos veces una moneda. Si se obtienen dos caras al lanzar las monedas, se lanza nuevamente un dado.**

a. Construye un diagrama de árbol que represente la situación.

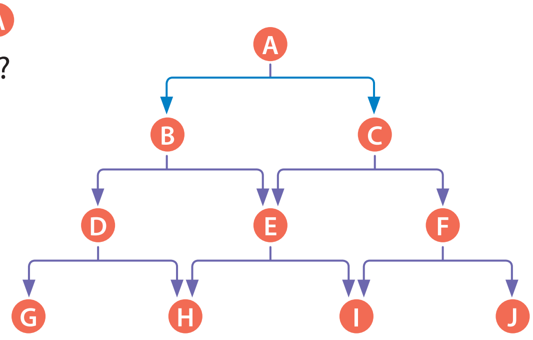
b. ¿Cuántas combinaciones posibles se pueden conseguir?

2. **Los cinco finalistas de un torneo internacional de golf son España, México, Portugal, Uruguay y Japón.**

a. ¿De cuántas maneras es posible premiar al primer, segundo y tercer lugar?

b. Si el primer lugar lo ganó Portugal y el segundo, México, ¿cuántas maneras hay de otorgar el tercer lugar entre los países restantes?

3. **En el diagrama se elige un camino para ir desde A hasta H. ¿Cuál es la probabilidad de pasar por E?**



Unidad 1 • La era digital .... Página 8

Página 9

- Las ventajas es que la tecnología ayuda a la humanidad facilitando ciertas actividades en la vida cotidiana, así como también en el desarrollo de las áreas del conocimiento humano. Una desventaja es que en la actualidad el ser humano está volviéndose muy dependiente de esta, se están generando nuevas fuentes de contaminación.
- Los negativos se pueden utilizar en temperaturas o economía, las fracciones y porcentajes sirven para dividir cosas o para descuentos.

Evaluación diagnóstica

1. **a.** –8
   b. 3,75
2. **a.** 100 000
   b. 10 000 000
3. **a.** Se encuentra a 55 m de profundidad.
   b. Corresponde a 1 050 personas.

Página 10

Lección 1 **Números enteros**

Multiplicación de números enteros

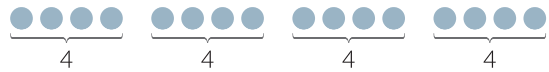
- –800
- Proporciona una referencia de la posición y alabeo del avión respecto al horizonte.
- –700
- Significa que se está descendiendo a 500 fpm. Se representa con –500
- –700 • 15 = –10 500. El avión habrá descendido 10 500 pies
- Se deben multiplicar los 220 m por los 8 minutos de descenso, lo cual representa un descenso de 1 760 m, lo cual significa que la altitud del avión a los 8 minutos es de 8 040 m.
- **Situación 1:** Un avión se encuentra descendiendo a 500 fpm y en un instante aumenta su velocidad de descenso en 200 fpm. ¿A qué velocidad se encuentra descendiendo? Se encuentra descendiendo a 700 fpm, debido a que –500 + (–200) = –700

  Situación 2: Un avión desciende a 300 fpm y en un instante duplica su velocidad. ¿A qué velocidad llega? Llega a 600 fmp, ya que –300 • 2 = –600.

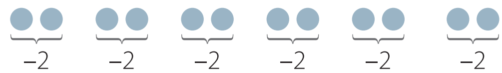
Página 14

Actividades

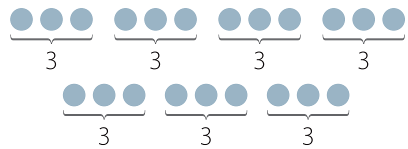
1. **a.** 16



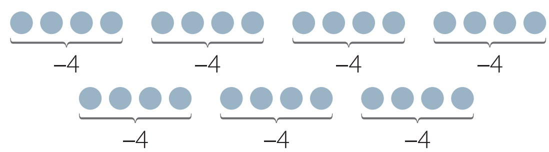
   b. –12



   c. –21

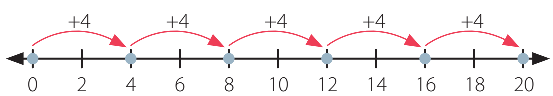


   d. –32

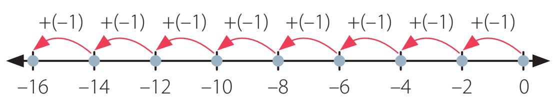


2. –11 < –10 < –1 < 4 < 6 < 21

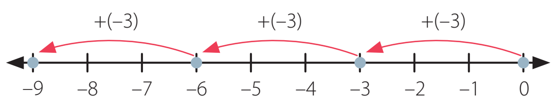
3. **a.**



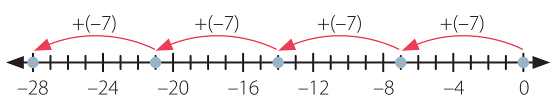
   b.



   c.



   d.



4. Actividad en clase

Página 15

5. **a.** –16
   b. 150
   c. –630
   d. 5
   e. –288
   f. 4
6. Si la cantidad de números negativos es par, el resultado será positivo, si es impar el resultado será negativo.

7. a. +
   b. –
   c. +
   d. +

8. Al multiplicar por –1 un entero positivo, se obtiene el mismo número, pero con signo opuesto. Lo mismo ocurre al multiplicar por –1 un entero negativo.

9. a. Debe pagar $4 980.
   b. El cargo se puede relacionar con –4 980.

10. a. –2 750
    b. 447
    c. –4 694
    d. 1 420
    e. 605
    f. –825

11. $-25 \cdot 3 \cdot (-8) \cdot (-12) = -75 \cdot 96 = -7\,200$

Página 16

División de números enteros

- La temperatura es de 0 °C.
- Hay que dividir el número de grados en que varió la temperatura, por el tiempo total entre las mediciones, esto es: $\frac{-12}{3} = -4$. La temperatura descendió 4 °C por hora.

Página 18

Actividades

1. a. –2
   b. 2
   c. –2
   d. 5
   e. –2
   f. –1
   g. –7
   h. 0
   i. 7
   j. –9
   k. –1
   l. –12

2. a. –5
   b. –1 200
   c. –36
   d. –32
   e. 21
   f. 0

3. Marta obtuvo –2 puntos en cada tirada.
   Solo pudo haber conseguido sumas mayores que 10.

4. Cuatro trabajadores recibieron el cheque.

5. Es correcto ya que es igual a multiplicarlo por –1

6. El error es de Jorge y está en el orden de las operaciones, el orden correcto es el que utiliza Carla.

Página 19

7. a. El saldo es de 64 000 dólares.
   b. En el segundo año tuvo la mayor pérdida.

8. En cada minuto aumentó 5 °C su temperatura.

9. a. F. $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}$
   b. V. $-1\,000 : -100 : -10 = 10 : -10 = -1$
   c. F. $1\,000 : (100 : 10) \neq (1\,000 : 100) : 10$

10. Respuesta variada. A continuación, se muestran ejemplos: –20 y 5; –15 y 5; –6 y 12; –3 y 3.

Página 20

Evaluación Lección 1

1. a. –45
   b. –8
   c. 8
   d. 36
   e. –2
   f. –48
   g. –12,5
   h. 144
   i. –6
   j. 200

2. Habrá disminuido su rentabilidad en $8 640.

3. a. 80; 16; –2
   b. 35; –35; 7

4. Avanza 62 m.

5. (–1, 10); (–2, –20); (8; 64); (–5, –50); (3, 24); (–10, –100); (2, 16)

Página 21

6. Pasarán 240 min.

7. a. Respuesta variada. A continuación, se muestran dos ejemplos:
      - {1; –1} {2; –2} {3; –3} {4; –4} {5; –5}
      - {2; –1} {3; –1} {4; –1} {5; –1} {6; –1}
   b. No ya que los dados no tienen el número cero por lo que la multiplicación nunca será 0.
   c. El menor número es –36 y el mayor –1.
   d. {1; –1} {2; –1} {3; –1} {4; –1} {5; –1} {6; –1} {1; –2} {2; –2} {3; –2} {1; –3} {2; –3} {1; –4} {1; –5} {1; –6}

8. a. Le descontaron 10 puntos por las incorrectas y 3 puntos por las no contestadas lo que dio un total de 13 puntos descontados.
   b. Obtuvo 72 puntos en total.

Página 22

Lección 2 **Números racionales**

El **conjunto** de los números racionales

- En las figuras 1, 2 y 3 el giro es positivo y en las 4 y 5 es negativo.
- Sí, teniendo en consideración una vuelta completa como el total:

  En la figura 1 se giró $\frac{1}{4}$ de vuelta que equivale a 0,25.

  En la figura 2 se giró $\frac{3}{4}$ de vuelta que equivale a 0,75.

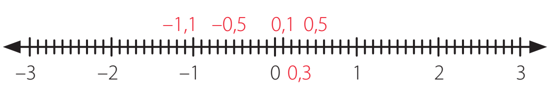
  En la figura 3 se giró una vuelta que equivale a 1.

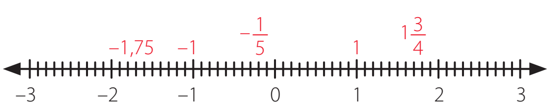
  En la figura 4 se giro $-\frac{1}{2}$ vuelta lo que equivale a –0,5.

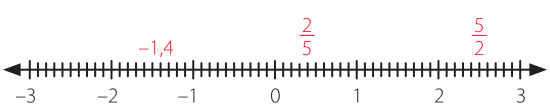
  En la figura 5 se giró $-\frac{3}{4}$ de vuelta lo que equivale a –0,75.

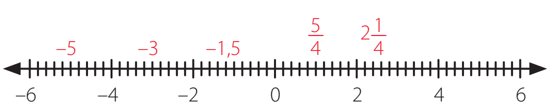
Página 23

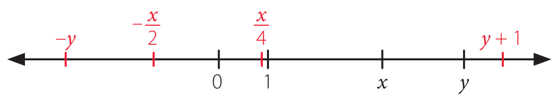
Actividades

1. Respuestas variadas. A continuación, se muestran ejemplos en cada caso.
   a. Magnitud: longitud. Contexto: cantidad de metros bajo el nivel del mar en que se encuentra un buzo.
   b. Magnitud: volumen. Contexto: cantidad de agua que queda en una botella.
   c. Magnitud: tiempo. Contexto: tiempo que demora una persona en recorrer una cierta distancia.
   d. Magnitud: masa. Contexto: la cantidad de pan que se compra.
2. a. $-\frac{9}{4}$ y $\frac{5}{4}$
   b. $-\frac{3}{7}$ y $-\frac{13}{7}$
3. a.


   b.


   c.


   d.


4. a. <
   b. =
   c. >
   d. >
5. Respuestas variadas. A continuación, se muestran ejemplos en cada caso.
   a. 0,015 y 0,016
   b. $-\frac{10}{21}$ y $-\frac{11}{21}$
   c. –2,045; –2,049
   d. $\frac{23}{20}$; $\frac{9}{8}$
6.


Página 24

Fracciones y **números decimales**

- Respuesta a cargo del estudiante.
- Se ve la frecuencia cardiaca, la duración de la actividad, el ritmo o velocidad y la distancia recorrida.
- La distancia recorrida.
- La representaría como $\frac{1}{2}$.
- Sí, cuando las divisiones no son exactas puede que pase esto.
- El cociente es $1,\overline{3}$.

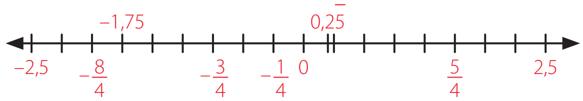
Página 26

Actividades

1. a. 3,5 kg de peras.
   b. 0,5 L de leche.
   c. $\frac{5}{2}$ kg de papas.
   d. 0,75kg de carne.
2. a. $\frac{21}{2}$
   b. –0,6
   c. $\frac{7}{90}$
   d. –2/9
   e. $\frac{1\,497}{99}$
   f. 2,25
   g. –1,1
   h. $5,\overline{3}$
   i. $-\frac{238}{90}$

Página 27

3.



4. No debería tener el mismo gusto, dado que los ingredientes están mezclados en diferente proporción, los cocientes son respectivamente $0,0\overline{5}$ y $0,0\overline{7}$.

5. **a.** $\frac{3}{6} = 0,5$

b. $\frac{16}{16} = 1$

c. $\frac{4}{16} = 0,25$

6. Es más preciso el resultado de Daniela ya que la división no da un resultado con decimales finitos. Francisco tendría razón si hubiese que aproximar el resultado a la centésima.

7. **a.** Debe darle las brocas n° 3,2 y la n° 4.

b. No hay brocas equivalentes.

Página 28

Adición y **sustracción** de números racionales

- 12,5 m y 6,82 m.
- 6,82 m
- Calculando 12,5 + 12,5 + 6,82 + 6,82 = 38,64 m, que corresponde a sumar todos los lados de la pantalla.

Página 30

Actividades

1. **a.** Al conjunto de los números racionales.

b. Laura: la tarjeta morada es decimal y la verde, fracción. Julián: la tarjeta morada es número mixto y la verde, fracción. Boris: Ambas tarjetas son decimales. Gabriela: la tarjeta morada es número mixto y la verde, fracción.

c. No, solo Laura contestó correctamente, el resultado de Julián debió ser 2, el de Boris 1,25 y el de Gabriela –2.

2. **a.** 7,25

b. 7,9

c. $0,7\overline{2}$

d. $2,9\overline{74}$

e. $\frac{57}{35}$

f. $10,2\overline{7}$

g. $\frac{77}{60}$

h. $0,13\overline{01}$

i. $\frac{8}{5}$

3. Se pueden recuperar 19,98 kg de materiales del computador.

4. **a.** $\frac{11}{12}$ de los estudiantes tienen *smartphone*.

b. 3 estudiantes no tienen teléfono celular.

c. Respuesta variada. A continuación, se muestra un ejemplo.

Las ventajas es que la comunicación es más rápida y se puede tener fácil acceso a la información; las desventajas son que principalmente esta tecnología genera mucha distracción en los jóvenes y en ciertos casos llega a absorberlos tanto que dejan de lado el contacto con la realidad directa.

Página 31

5. **a.** La altura del asta de la bandera azul es de 1,87 m.

b. La diferencia de la altura de las astas es de 0,08 m.

c. La bandera azul mide 0,01 m más que la roja.

6. **a.** Mercurio tiene menor masa.

b. La diferencia es de 300 000 000 000 000 000 000 000.

c. No superan la masa de la tierra; equivalen a un $\frac{99}{100}$ de la masa de la tierra.

Página 32

Multiplicación y **división** de números racionales

- Ambos procedimientos son correctos
- Respuesta a cargo del estudiante.

Página 34

Actividades

1. **a.** $\frac{9}{8}$

b. $-\frac{4}{9}$

c. 9,1

d. $1,2\overline{1}$

e. 0,064

f. 0,50625

g. $\frac{24}{117}$

h. $-\frac{221}{62}$

i. $-\frac{9}{160}$

2. **a.** El peso total de las cajas es de 1134 kg.

b. El área es de 25,7355 cm^2.

c. Se alcanzan a llenar 23 sacos y sobra $\frac{1}{3}$ de kg.

d. Alcanzaron a reunir 71,2 kg por lo tanto no lograron la meta, les falta por reunir 9,3 kg.

3. Respuesta variada. A continuación, se muestran dos ejemplos.
   Ejemplo 1: Se tienen 3,6 kg de arroz y se deben dividir en tarros que tienen 1,2 kg de capacidad ¿Cuántos tarros se alcanza a llenar? Se alcanzan a llenar 3 tarros
   Ejemplo 2: Se tiene una bebida de 1,5 L y los vasos donde se servirá son de 0,25L. ¿Cuántos vasos alcanzó a llenar? Se alcanzan a llenar 6 vasos
4. $A = -\frac{6}{5}$; $Q = \frac{2}{15}$; $M = 0{,}3$; $D = -\frac{4}{3}$; $G = \frac{13}{30}$; $R = -\frac{40}{13}$
5. **a.** Se deben dividir los 16 L en 2/3 L.
   b. Se multiplica 16 por el inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$.
   c. Se riegan 24 plantas.

Página 35

6. **a.** Se pueden recargar 5 veces los 3 cartuchos, es decir, 15 cartuchos.
   b. Se puede recargar 8 veces el cartucho negro.
7. Actividad en clase.
   7. 5. a. Se observan los números racionales en las proporciones que se mantienen en la construcción de un fractal.
   7. 5. b. La distancia del corte es siempre a $\frac{1}{4}$ del pliegue nuevo.

Página 36

Evaluación Lección 2

1. **a.** 2,125
   b. $\frac{63}{100}$
   c. $-0{,}\overline{5}$
   d. $\frac{474}{90}$
   e. $\frac{235}{99}$
   f. $-\frac{155}{100}$
2. **a.** Equivalen a 200 pennies.
   b. Equivalen a 500 centavos.
   c. Equivalen a 2,5 dimes.
   d. Se requieren 24 monedas de 50 centavos.
   e. Se requieren 6 quarter.
3. **a.** El día lunes es el día que más trabaja.
   b. Trabaja $28\frac{5}{6}$ h.
   c. La diferencia es de $2\frac{5}{12}$ h, lo cual equivale a 145 min.

Página 37

4. **a.** El perímetro de la cancha es de 351,84 m.
   b. El área de la cancha es 7 429,31 m^2.
5. El ancho del rectángulo mide 0,2 cm.
6. Lo terminará en 3 días.
7. Tiene disponible $\frac{3}{44}$ de la memoria de su *tablet*.
8. Un $\frac{9}{40}$ del total corresponde a publicidad.
9. Se puede calcular dividiendo el área por el ancho, lo cual da como resultado un largo de $\frac{8}{7}$ m.
10. Se detiene 7 veces a descansar.
11. El sistema operativo ocupa 3,241 GB.

Página 38

Lección 3 **Potencias, raíz cuadrada y porcentajes**

Multiplicación de potencias

- En los pisos de la pirámide hay 64, 36, 16 y 4 cubitos. Sigue una regularidad dada por $2n^2$.
- 8^2; 6^2; 4^2; 2^2
- Hay 120 cubitos en total en la pirámide.
- Se deberían agregar 100 cubitos.

Página 42

Actividades

1. **a.** 12^3
   b. 5^5
   c. 6^5
2. **a.** $3 \cdot 3^3 = 3^4 = 81$
   b. $5^2 \cdot 5^3 = 5^5 = 3\,125$
   c. $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = 3^8 = 6\,561$
   d. $5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 5^7 = 78\,125$
   e. $4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^1 = 4^6 = 4\,096$
   f. $7^1 \cdot 7^2 \cdot 7^3 = 7^6 = 117\,649$
   g. $3^3 \cdot 4^3 = 12^3 = 1\,728$
   h. $6^2 \cdot 9^2 = 54^2 = 2\,916$
   i. $2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2 = 110^2 = 12\,100$
   j. $10^2 \cdot 12^2 \cdot 3^2 = 360^2 = 129\,600$
3. **a.** F.
   b. V.
   c. F.
4. **a.** $5^5 \cdot 2^3$
   b. 2^7
   c. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$
   d. $2^7 \cdot 5^2$
   e. $2^6 \cdot 5^2$
   f. $2^5 \cdot 3$

5. a. El exponente es 5.
   b. Su exponente es 3.
6. El alimento se habrá descompuesto a los 80 min.

Página 43

7. Si todos asistieran participarían 135 personas.
8. a. 118
   b. 279
   c. 7 263
   d. 91 784
   e. 99 900 000
   f. 6 208
9. a. Se representaría como 4^2 cm.
   b. Son correctos. La diferencia es que Andrea utiliza la propiedad de la suma de exponentes de potencias de bases iguales y Emilio la propiedad de la potencia de una potencia, siendo el resultado equivalente.
   c. Respuesta a cargo del estudiante.
10. La primera opción.

Página 44

División de potencias

- Un piso de la torre tiene 3^2 cubos.
- Su torre tendrá 9 pisos.
- Josefina tiene 3^4 cubos.

Página 46

Actividades

1. a. $2^1 = 2$
   b. $3^0 = 1$
   c. $5^0 = 1$
   d. $6^0 = 1$
   e. $3^3 = 27$
   f. $7^2 = 49$
   g. $1^2 = 1$
   h. $8^0 = 1$
   i. $4^2 = 16$
   j. $9^0 = 1$
   k. $5^2 = 25$
   l. $4^3 = 64$
2. a. $6^4 : 4 = 4^3 : 4^1 = 4^{3-1} = 4^2 = 16$
   b. $125 : 5 = 5^3 : 5^1 = 5^{3-1} = 5^2 = 25$
   c. $343 : 49 : 7 = 7^3 : 7^2 : 7^1 = (7^3 : 7^2) : 7^1 = (7^{3-2}) : 7^1 = 7^1 : 7^1 = 7^{1-1} = 7^0 = 1$
   d. $729 : 9 : 81 = (729 : 9) : 81 = (9^3 : 9^1) : 9^2 = (9^{3-1}) : 9^2 = 9^2 : 92 = 92 - 2 = 90 = 1$
   e. $216 : 6 : 6 = (216 : 6) : 6 = (6^3 : 6^1) : 6^1 = (6^{3-1}) : 6^1 = 6^2 : 6^1 = 6^{2-1} = 6^1 = 6$
   f. $1.000 : 100 : 10 = (1.000 : 100) : 10 = (10^3 : 10^2) : 10^1 = (10^{3-2}) : 10^1 = 10^1 : 10^1 = 1$
   g. $625 : 25 = 25^2 : 25^1 = 25^{2-1} = 25^1 = 25$
   h. $225 : 9 = 15^2 : 3^2 = (15 : 3)^2 = 5^2 = 25$
   i. $512 : 64 = 2^9 : 2^6 = 2^{9-6} = 2^3 = 8$
   j. $512 : 8 : 2 = (2^9 : 2^3) : 2^1 = (2^{9-3}) : 2^1 = 2^6 : 2^1 = 2^{6-1} = 2^5 = 32$
   k. $400 : 16 : 25 = (20^2 : 4^2) : 5^2 = (20 : 4)^2 : 5^2 = 5^2 : 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 = 1$
   l. $256 : 128 = 2^8 : 2^7 = 2^{8-7} = 2^1 = 2$
3. a. 10^2 cm
   b. 3^2 cm
   c. 8 cm
4. a. Quedarán 16 g es decir 2^4 g.
   b. Deberán transcurrir 3 h desde el inicio.
5. Tendrán que transcurrir 6 h.

Página 47

6. Había 2 bacterias inicialmente.
7. a. Debe obtener 9.
   b. No, el resultado correcto es 16.
   c. Se obtiene 125.
   d. Sí.
   e. Debe obtener 27.
8. a. $15^3 : 15 : 15 = 15^{3-1-1} = 15^1 = 15$
   b. $18^3 : 2^3 : 3^3 = (18 : 2 : 3)^3 = 3^3 = 27$
   c. $20^3 : 20^3 = 20^{3-3} = 20^0 = 1$
   d. $11^2 : 11^2 = 11^{2-2} = 11^0 = 1$
   e. $13^3 : 13^2 : 13 = 13^{3-2-1} = 13^0 = 1$
   f. $25^3 : 5^3 = (25 : 5)^3 = 5^3 = 125$
9. a. El valor de $a - 2$ es 3 debido a que $3^3 = 27$.
   b. 243
   c. 2 187

Página 48

Raíz cuadrada

- El área de cada cara del cubo corresponde al área total dividida en 6, lo que resulta 9 600 cm^2. Luego, se debe buscar un número que al multiplicarlo por sí mismo resulte 9 600, el cual corresponde, aproximadamente, a 98.

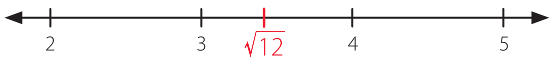
Página 50

Actividades

1. a. 1
   b. 3
   c. 4
   d. 5
   e. 8
   f. 9
   g. 11
   h. 12
   i. 15
   j. 19
   k. 20
   l. 23

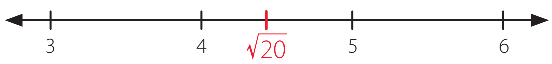
2. a. 25
   b. 16
   c. 100
   d. 36
   e. 1
   f. 1 600
   g. 10 000
   h. 9
   i. 81
   j. 2 500
   k. 256
   l. 625

3. a. Está entre el 3 y el 4.



   b. Está entre el 3 y el 4.

   c. Está entre el 4 y el 5.



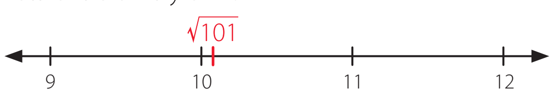
   d. Está entre el 5 y el 6.

   e. Está entre el 6 y el 7.

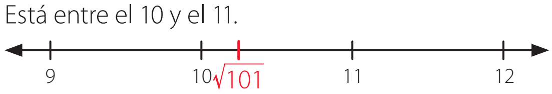
   f. Está entre el 7 y el 8.

   g. Está entre el 8 y el 9.

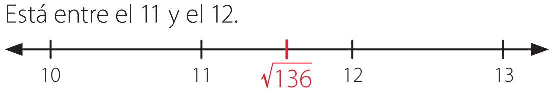
   h. Está entre el 10 y el 11.



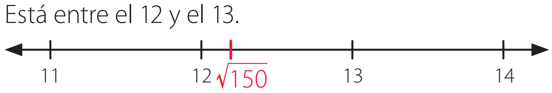
   i. Está entre el 10 y el 11.



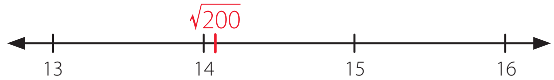
   j. Está entre el 11 y el 12.



   k. Está entre el 12 y el 13.



   l. Está entre 14 y el 15.



4. a.

	$\sqrt{144}$	
$\sqrt{36}$		$\sqrt{100}$
	$\sqrt{16}$	

   b.

	$\sqrt{121}$	$\sqrt{36}$
$\sqrt{81}$		$\sqrt{25}$
$\sqrt{64}$		

   c.

$\sqrt{256}$	$\sqrt{196}$	$\sqrt{144}$
$\sqrt{121}$		$\sqrt{169}$

5. Sí, existe. Sería un cuadrado de lado 8 cm y su perímetro sería 32 cm.

Página 51

6. a. Marisol recibirá $15 000.
   b. El perímetro es de 70 cm.
   c. Recorre 1 600 m.

7. a. $P = 60$ cm
   b. $P = 52$ cm
   c. $P = 24$ cm

8. a. Su perímetro es, aproximadamente, 44 cm.
   b. Su perímetro es, aproximadamente, 46 cm.
   c. Su perímetro es, aproximadamente, 48 cm.

9. La rapidez del móvil es de 30 m/s.

Página 52

Variaciones porcentuales

- Actividad en clases

Página 56

Actividades

1. Es falso, porque un aumento del 25 % del contenido corresponde a tener un total de 562,5 mL.

2. a. Su gasto aumentará en $1 200.
   b. El nuevo sueldo del trabajador será $578 600.

3. a. Lo mantuvo durante 4 años.
   b. Pagará $19 831 por las pizzas.
   c. Su nuevo sueldo será de $315 000.
   d. El producto aumentó un 58,4 % respecto al precio de diciembre.

Página 57

4. a. Conviene más comprar en el segundo supermercado, dado que llevar 6 paquetes cuesta $2 250 mientras que en el primero cuesta $2 300.

b. En el primero es un 15 % y en el segundo un 17 %, aproximadamente.

5. a. Tenía \$6 000 000.
   b. Tenía \$8 000 000.

6. a. El sistema que genera más interés corresponde al préstamo de 12 meses, que en total genera \$526 900.
   b. A la entidad ingresan, aproximadamente, \$1 256 152.
   c. Respuesta variada. A continuación, se muestran dos ejemplos.
   La cuota mensual del préstamo de \$3 500 000 en 3 años es, aproximadamente, de \$106 944.
   La cuota mensual del préstamo de \$1 200 000 en 3 años es, aproximadamente, de \$36 667.

Página 58

Evaluación Lección 3

1. a. 8
   b. 125
   c. 81
   d. 1
   e. 27
   f. 225

2. a. 3
   b. 7
   c. 52
   d. 41
   e. 729
   f. 4

3. a. $4^3 = 64$
   b. $5^2 = 625$
   c. $10^5 = 100\,000$
   d. $2^7 = 128$

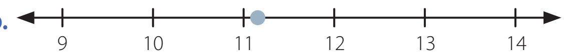
4. a. $5^5 = 3\,125$
   b. $6^3 = 216$
   c. $4^9 = 262\,144$
   d. $3^1 = 3$
   e. $5^2 = 25$
   f. $100^1 = 100$
   g. $10^9 = 1\,000\,000\,000$
   h. $2^6 = 64$

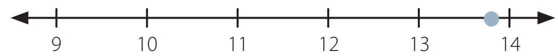
5. Habrá 64 bacterias.

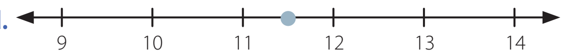
6. Se expresa con la potencia 3^8.

7. Un contenedor tiene 100 000.

8. a. 

   b. 

   c. 

   d. 

Página 59

9. La medida del lado es, aproximadamente, 15 cm.

10. a. 4
    b. 2 401
    c. 5
    d. 14 641

11. a. El porcentaje de ganancia es del 15 %.
    b. El precio sin descuento es de \$352 000.
    c. Camila pagó \$84 000 y Luciana \$90 000. por lo tanto Camila pagó menos.

12. a. V. Ya que 100 % – 12 % = 88 %.
    b. F. Queda un 25 % de la pizza.
    c. F. Me quedan nueve décimos de lo que había ahorrado.

13. a. Polera: 85 %; Pantalón: 80 %; Chaqueta: 75 %.
    b. No son todos correctos, el precio del pantalón con descuento debería ser \$12 800 y el de la chaqueta \$19 500.

Página 60

Evaluación final

1. a.

2	10		
10		2	
−2			
5	−5		

b.

	2	14	
		−4	2
2	−14		
2			

2. a. −1
   b. −9
   c. 6
   d. −48
   e. $-\frac{2}{3}$
   f. 32
   g. 23
   h. −14
   i. −5

3. a. $\frac{957}{280}$
   b. $\frac{1\,657}{198}$
   c. $\frac{161}{120}$
   d. $\frac{415}{417}$
4. No se respetó el orden de las operaciones.
   $1\frac{1}{5} - 0{,}5 \cdot \frac{10}{3} = \frac{6}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{6}{5} - \frac{10}{6} = -\frac{7}{15}$
5. Es correcto, ya que $4 \cdot (-4) = -16$ y $-16 + (-3) = -19$
6. a. La supera en 2 729 veces.
   b. Debería comprar, aproximadamente, 6,8 m de cinta.

Página 61

   c. Se han conseguido 5,75 L de aceite.
   d. Se alcanzan a llenar 31 sacos y sobran 0,2 kg.

7. a. **AFP:** $93 600
      Salud: $50 400
      Total Descuentos: $144 000
      Sueldo Líquido: $576 000
   b. **Sueldo Bruto:** $570 000
      Salud: $39 900
      Total Descuentos: $114 000
      Sueldo Líquido: $456 000
   c. **Sueldo Bruto:** $775 000
      AFP: $100 750
      Salud: $54 250
      Sueldo Líquido: $620 000
8. a. V.
   b. F.
   c. V.
   d. V.
   e. F.
9. Es igual a 2.
10. No está en lo correcto, pagó un 27 % de recargo.
11. Su perímetro aumentará en un 30 % y su área en un 69 %.

Página 62

Síntesis y Repaso

Lección 1 Números enteros

1. a. –63
   b. 60
   c. –256
   d. 140
   e. 6
   f. –40
   g. 4
   h. –44
2. El promedio fue de 1 °C.

Lección 2 Números racionales

1. a. $0{,}\overline{4}$
   b. $\frac{9}{50}$
   c. $-0{,}\overline{4}$
   d. $\frac{49}{9}$
2. a. 2,25
   b. –0,3
   c. –6,5
   d. $\frac{19}{45}$
3. Le falta por tejer $\frac{7}{18}$ del total.

Página 63

Lección 3 Potencias, raíz cuadrada y porcentajes

1. a. $5^5 = 3\,125$
   b. $6^3 = 216$
   c. $64^3 = 262\,144$
   d. $3^1 = 3$
   e. $5^2 = 25$
   f. $100^1 = 100$
   g. $10^9 = 1\,000\,000\,000$
   h. $2^6 = 64$
2. a. 3
   b. 11
   c. 8
   d. 100
   e. 16
3. Mide, aproximadamente, 14 cm.
4. Las ventas este año fueron de $174 200 000.
5. Macarena pagó un total de $99 275.
6. El precio del artículo varió en un 20 %.

Unidad 2 • Medioambiente

Página 65

- Pregunta personal.
- Pregunta personal.

Evaluación diagnóstica

1. a. 1
   b. –4
   c. 180
   d. $-\frac{13}{3}$
2. a. $2m + 7n$
   b. $7x^2 + 3x$
   c. $-2ab + 2ab^2$
   d. $12m^2 - 5mn + -4m$
3. a. $x = 5$
   b. $x = -2$
   c. $x = 8$
   d. $x > 2$
   e. $x > 7$
   f. $x < -9$
4. a. $2x$
   b. $3z + 8$
   c. $x - y$
   d. $\frac{x}{2} - 6$

Página 66

Lección 1 Expresiones algebraicas

Adición y sustracción de expresiones algebraicas

- El curso obtuvo 492 puntos.
- La expresión que permite calcular el total de puntos obtenidos es $8v + 5p$.

Página 68

Actividades

1. a. $5x + 2y$
   b. $13m - 11n$
   c. $7x + 6y + 8x^2$
   d. $7a + 3b + 6ab^3$
   e. $-2ab - 3b$
   f. $9b - 5xy$
2. a. $11m$
   b. $2ab$
   c. $9x^2$
   d. $12a$
3. a. $6q + 5p^2$
   b. $4m^2 + 4mn + \frac{4}{3}mn^2$
   c. $2a^2 + 6ab$
   d. $4xy^2 + 5x^3y$
4. a. $2p + 4n$
   b. $2m + 6n$
   c. $2p + 4m + 2n$
5. a. $3m$
   b. $7m - 3n$
   c. $-m + 2n$
   d. $m - 2n$
   e. $-5m + 5n$
   f. $-3m + n$

Página 69

6. El área total del centro vacacional es $8x + 27xy$.
7. a. Dura más tiempo el teléfono de gama alta.
   b. El teléfono con mayor vida útil dura 2 años más que el que dura menos.
8. a. Carlos tiene $(n + 18)$ años.
   b. Antonia tendrá $(n + 20)$ años.
   c. La suma de las edades de Carlos y Antonia es de $(2n + 33)$ años.
9. La expresión es $7x^2 + 17x$.

Página 70

Multiplicación de expresiones algebraicas

- Sofía calculó el área como un total multiplicando sus lados, mientras que Nicolás dividió la figura en dos más pequeñas y sumó sus áreas.
- Las expresiones son equivalentes, pues al aplicar la propiedad distributiva sobre el resultado de Sofía, se tiene el resultado de Nicolás.
- El área asignada para los desechos orgánicos es de 6 m^2, mientras que el área para los desechos inorgánicos es de 9 m^2.
- En ambos casos resulta 15 m^2.

Página 74

Actividades

1. a. $6ab$
   b. $2pt + mn$
   c. $ac + ad + bc + bd$
2. a. $6x^3$
   b. $x^3 + 2x^2$
   c. $448a^3 + 768a^2$

3. $11x$

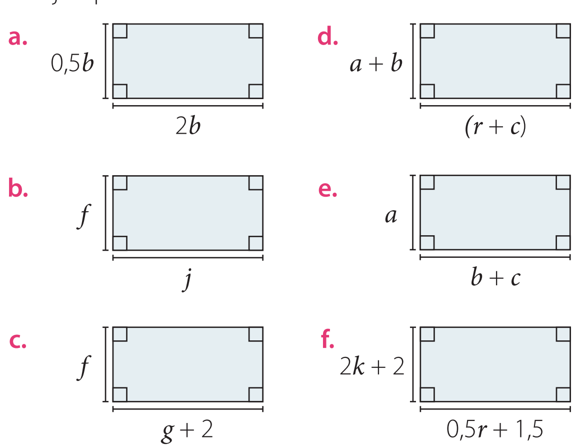
4. a. $3a + 3d$
   b. $3db - fb$
   c. $2bl + 6bt - 16b^2$
   d. $40td–10tr + 5td^3$
   e. $2g + 6h + fg + 3fh$
   f. $kr - gr + 5tk–5tg$
   g. $mñ - mp + m - nñ + np - n$
   h. $5dt^2 - 2lt^2 + 11t^2 + t^4$

5. a. $2m + 2$
   b. $10m - 15$
   c. $2m^2 - m - 3$
   d. $8m^2 - 6mn - 12m + 9n$
   e. $12m - 6n - 6$
   f. $-18m + 18n + 6$

Página 75

6. a. $40x^2$
   b. $30x^3y - 40xy^3 + 80xy$
   c. $0{,}5x^4 - 6x^3 + 10x^2$
   d. $-12m^3n^3 - 3m^3n^2 - 44m^2n^3 - 11m^2n^2 + 0{,}75m^2n + 2{,}75mn$
   e. $\dfrac{3x^3y}{8} - \dfrac{x^2y^2}{4} + \dfrac{3x^2}{16} - \dfrac{xy}{8}$
   f. $-\dfrac{2a^2}{5} + \dfrac{104ab}{35} + \dfrac{21a}{5} + \dfrac{3b^2}{14} - \dfrac{17b}{14} - 2$
   g. $-\dfrac{4x^5y^2}{5} + \dfrac{5x^4y^2}{12} + \dfrac{24x^3y^2}{35} - \dfrac{5x^2y^2}{14}$
   h. $-18a^3b^3 + 54a^2b^3 + 15a^2b^2 - 45ab^2 + 12ab - 10$

7. Pregunta variada. A continuación, se muestra un ejemplo en cada caso.



8. a. 3
   b. $(n + m)$
   c. $(c + 1)$

9. a. pq; pm; qm; m^2
   b. • El ancho es $p + m$, mientras que el largo es $q + m$
   • El área del rectángulo es $(p + m)(q + m) = pq + pm + qm + m^2$. Esta expresión es equivalente a la suma de las áreas de sus componentes.

Página 76

Evaluación Lección 1

1. a. $P = 4j + 2i + 2h$; $A = 2kj + hi$
   b. $P = 5a - 6$; $A = 6a^2 - 20a - 16$
   c. $P = 4a + 4b + c$; $A = 2a^2 + 2bc$
   d. $P = 12p$; $A = 6p^2$

2. a. $17 + 18n$
   b. ab
   c. $-9xy + 3x$
   d. $8ab^2 - 7{,}5a^2b$
   e. $-0{,}5x + 2{,}06y$
   f. $\dfrac{p}{2} + \dfrac{21q}{5}$
   g. $-5x - 20$
   h. $104a^2 - n^2$

3. a. $7a + 7b$
   b. $5bd - b^2$
   c. $4bp + 24bd$
   d. $12t^2 - 6tr$
   e. $g^2 + 3gt + 2g + 6t$
   f. $4p^2 + 5pt - 12p–15t$
   g. $-mq + mp + nq - np$
   h. $x^2 - xy - 6y^2$
   i. $45d^2 - 18dl$

4. a. $2m + p + 1$
   b. $3m - 4p + 2$
   c. $-6m^2 + 10mp + 3m - 5p$
   d. $2mp + 4m - p - 2$
   e. $-8p + 6m + 4$
   f. $30p - 15m + 10$

Página 77

5. $2a^2 + ab$

6. a. $8x + 6$
   b. $3x^2–x–10$
   c. $3x2 + 8x + 5$
   d. $4x^2–8x$

7. a. V.
   b. V.
   c. F. La expresión de la derecha resulta $4x - 4$, que difiere con la expresión de la izquierda.

d. V.
e. V.
f. V.

Página 78

Lección 2 Ecuaciones e inecuaciones

Ecuaciones

- $x + 25\,000 = 45\,000$
- $\frac{1}{4}x + 25\,000 = 45\,000.$

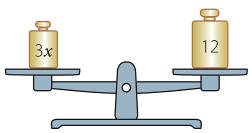
  La ecuación se puede resolver restando a ambos lados 25 000 y luego multiplicando ambos lados por 4.

Página 80

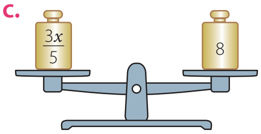
Actividades

1. a. $6 = x + 2; x = 4$
   b. $8 + 3x = 5x; x = 4$
   c. $4x = 2x + 5; x = 2{,}5$
   d. $9 + 4x = 10x; x = 1{,}5$

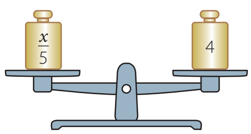
2. a.



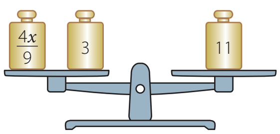
c.



b.



d.



3. a. $x = \frac{12}{5}$
   b. $x = -1$
   c. $x = -1$
   d. $x = -5$
   e. $x = 4$
   f. $x = -\frac{4}{5}$

4. a. $x = 45$
   b. $x = \frac{172}{5}$
   c. $x = \frac{537}{40}$

Página 81

5. a. Se necesitan 3 círculos.

6. a. $2x + 11 = x + 10$
   b. $x = \frac{x}{4} - 3$
   c. $\frac{x}{3} - 10 = 3x$
   d. $3x + 6 = 42$

7. a. $10\,000x = 1\,500\,000 + 800\,000$
   Hay que vender 230 entradas.
   b. $\frac{5}{8}x + \frac{3}{4} \cdot 1\,080 = 4\,560$
   1 kg de queso cuesta \$6 000.
   c. $\frac{3}{4}x + x = 35$
   La hermana de Tomás tiene 20 años.
   d. $2x + 4x = 96{,}6$
   Las dimensiones del rectángulo son 16,1 cm de ancho y 32,2 cm de largo.
   e. $x\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)\right) = 200$
   La longitud de la avenida es de 4 000 m.

8. a. Su colección tiene 30 relojes.
   b. La hija recibirá 15 relojes, la nieta, 5, el sobrino, 5, y el hermano, 5.

Página 82

Inecuaciones

- Cada contenedor debe tener menos de 169 kg.
- $x < (1\,200 - 186) : 6$
- Respuesta a cargo del estudiante.

Página 85

Actividades

1. a. $5 + x > 6{,}5$
   $x > 1{,}5$
   b. $6 + 2x < 10 + \frac{4}{5}$
   $x < \frac{12}{5}$

2. a. $x < 8$
   b. $x > 7$
   c. $x < 6$
   d. $x > 20$
   e. $x < 2$
   f. $x < 3$

3. a. $x > 2$
   b. $x > \frac{1}{2}$
   c. $x < -\frac{3}{10}$
   d. $x < \frac{7}{9}$
   e. $x > -\frac{4}{3}$
   f. $x > \frac{1}{4}$

4. a. $4x < 600$
   b. $5 + 3x < 65$
   c. $2x + 2 < 3x$
   d. $x + 5 > 2x - 15$

5. a. $4 < x < 10$
   b. $5{,}2 < x < 14{,}2$
   c. $\frac{4}{3} < x < \frac{9}{4}$

Página 86

6. a. Como máximo puede transportar 5 automóviles.
   b. Deben vender por lo menos 4 000 números.
   c. El otro lado debe ser menor que 3 km.
   d. Deben sumar menos de 660 kg.

Página 87

Herramientas tecnológicas

1. a. $x > -\frac{93}{5}$
   b. $x > \frac{2}{195}$
   c. $x < -\frac{21}{8}$
   d. $x < \frac{1}{9}$
   e. $x < -\frac{1}{24}$
   f. $x > -\frac{33}{10}$

Página 88

Evaluación Lección 2

1. a. $x = \frac{9}{2}$
   b. $x = -\frac{3}{4}$
   c. $x = 3$
   d. $x = \frac{17}{6}$
   e. $x = \frac{25}{7}$
   f. $x = \frac{144}{11}$

2. a. $x < 10$
   b. $x < -\frac{15}{22}$
   c. $x > \frac{1}{5}$
   d. $x < \frac{12}{19}$
   e. $x > -\frac{2}{25}$
   f. $x > \frac{1}{16}$

3. Se deben agregar 50 g a la balanza.

4. a. $3x + 3 < 336$
   b. $7 + 2x < 75$
   c. $\frac{x}{4} + 2 < 3x$
   d. $x - 7 > 3x - 15$

5. a. $x = 5$ b. $x = 35$ c. $x = 9$

Página 89

6. a. La medida del lado es 16 cm.
   b. Tomás tiene 20 años.
   c. El kilogramo de almendras cuesta $9 500.
   d. El área del triángulo es 6 cm^2.
   e. Sofía puede ir, a lo más, 14 veces.
   f. Cada lado debe medir menos de 0,7 m.
   g. x debe medir menos de 23 m.

Página 90

Lección 3 Funciones

Concepto y **representación** de función

- Se cargan 20 teléfonos al pedalear 5h y 28 teléfonos al pedalear 7 h en las mismas condiciones.
- $T = 4h$, con h igual a las horas de pedaleo y T a la cantidad de teléfonos cargados.
- Las horas de pedaleo y la cantidad de teléfonos cargados.

Horas de pedaleo	1	2	3	4	5	6	7
Teléfonos Cargados	4	8	12	16	20	24	28

Página 94

Actividades

1. a. Es función. b. Es función. c. Es función.

2. a. Variable independiente: medida de arista; Variable dependiente: Volumen del cubo.
   b. Variable independiente: el número; Variable dependiente: Su sucesor.
   c. Variable independiente: Cantidad de kilogramos; Variable dependiente: Precio del pan.

3. $y = 2x + 3$

4. a. La medida de su otro ángulo agudo.
   b. Ambas variables pueden tomar valores mayores que 0° y menores que 90°, ya que para la formación de un triángulo, las medidas de sus ángulos interiores deben sumar 180°.
   c. El valor de x e y sería 45°.

d.

x	10	20	30	40	50	60	70
y	80	70	60	50	40	30	20

5. a. No es función.
   b. No es función.
   c. No es función.
   d. Es función.

6. a. Es función.
   b. No es función.
   c. No es función.
   d. Es función.

Página 95

7. a. Salida: 70, 105, 140
   b. Entrada: $\frac{10}{7}, \frac{20}{7}, \frac{30}{7}$

8. Respuesta variada. A continuación, se muestran ejemplos.

a.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	9	13	17	21	25

b.

x	0	–1	–2	–3	–4
$g(x)$	2	3	4	5	6

c.

x	0	1	2	3	4
$h(x)$	1	0,75	0,5	0,25	0

d.

x	0	1	2	3	4
$k(x)$	10	11	12	13	14

e.

x	0	–1	–2	–3	–4
$f(x)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8

f.

x	0	–1	–2	–3	–4
$g(x)$	–2	–1	2	7	14

g.

x	0	1	2	3	4
$h(x)$	0	2	8	18	32

h.

x	0	1	2	3	4
$k(x)$	2	2,5	3	3,5	4

i.

x	0	–1	–2	–3	–4
$g(x)$	0	–1	–8	–27	–64

9. a. $f(-2) = 6; f(0) = 2; f(2) = 6$
   b. $g(-1) = 2; g(0) = 0; g(1) = 2$
   c. $h(0) = 0; h(1) = 1; h(4) = 2$

10. a. $Rec(f) = \{0,20,40,60\}$
    b. $Rec(g) = \{0,-15,-30,-45\}$
    c. $Rec(h) = \{-5,-4,-3,-2\}$
    d. $Rec(f) = \{4,19,34,49\}$

11. a. $T = 3x + 20$
    b. $Dom(T) = [0,60]$; $Rec(T) = [20,200]$

Página 96

Función lineal

•

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Cantidad de latas usadas	3	6	9	12	15	18

- $f(x) = 3x$
- La figura 456 usaría 1 368 latas.
- Respuesta a cargo del estudiante.

Página 100

Actividades

1. a. No es función lineal.
   b. Es función lineal.
   c. Es función lineal.
   d. No es función lineal.

2. a. Viaja a 90 km/h
   b. Distancia recorrida: 315 km. Tiempo: 3,5 h.
   c.

x	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
y	270	315	360	405	450	495	540	585

3. a. La diagonal de la pantalla mide 53,43 cm.
   b. Debe ubicarse a 368,3 cm de la pantalla.

4. a. Pendiente positiva: g, f y h. Pendiente negativa: k, p y q.
   b. El único punto en común es el (0, 0). Esto porque son funciones lineales y pasan por el origen.

Página 101

5. a. h
   b. f
   c. k
   d. h
   e. g
   f. h
   g. g

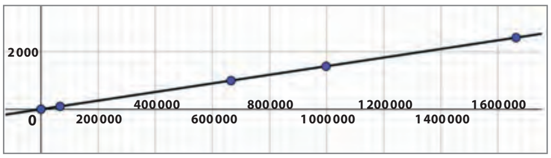
6. La siguiente actividad considera el cambio del dólar a 665 pesos chilenos. Adaptar de acuerdo al cambio actual.

a.

Dólar (USD)	0	100	1 000	1 500	2 500
Pesos chilenos (CLP)	0	66 500	665 000	997 500	1 662 500

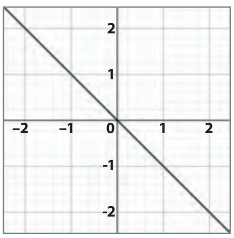
b. $f(x) = \frac{x}{665}$, donde $f(x)$ es el monto en dólares y x es el monto en pesos chilenos.

c.

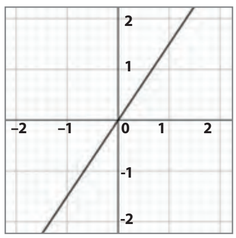


d. Respuesta a cargo del estudiante.

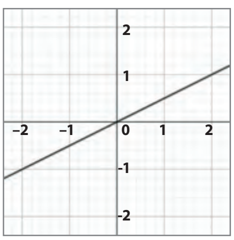
7. a.



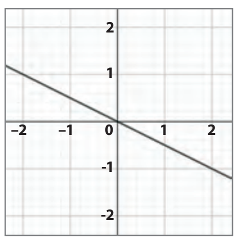
c.



b.



d.



8. a. Cumple. $f(x \cdot k) = f(8) = 4 = kf(x) = 4f(2) = 4$

b. Cumple. $f(x + z) = f(-4) = -2 = f(x) + f(z) = 1 - 3 = -2$

c. Cumple. $f(x - kz) = f(-28) = -14 = f(x) - kf(z) = f(-8) - 2f(10) = -4 - 10 = -14$

d. Cumple. $kf(x + z) = -2f(-4) = 4 = kf(x) + kf(z) = -2f(-10) - 2f(6) = 10 - 6 = 4$

Página 102

Función afín

- 1 536; 9 348; 22 368; 26 708
- $y = 668 + x \cdot 868$
- Que esta función tiene un valor fijo que no depende de la variable x.

Página 106

Actividades

1. a. Es una función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$ con $c \neq 0$.

b. Es una función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$ con $c \neq 0$.

c. Es una función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$ con $c \neq 0$.

d. Es una función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$ con $c \neq 0$.

e. Es una función lineal, ya que es de la forma $y = mx$.

f. Es una función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$ con $c \neq 0$.

2. a. $m = -3$; Coordenada corte eje $Y = (0,6)$

b. $m = -1$; Coordenada corte eje $Y = (0,10)$

c. $m = -9$; Coordenada corte eje $Y = (0; 1,5)$

d. $m = -2$; Coordenada corte eje $Y = \left(0; -\frac{5}{9}\right)$

e. $m = \frac{5}{4}$; Coordenada corte eje $Y = \left(0; \frac{1}{2}\right)$

f. $m = 1$; Coordenada corte eje $Y = (0; -2,4)$

g. $m = -\frac{3}{4}$; Coordenada corte eje $Y = \left(0; \frac{3}{4}\right)$

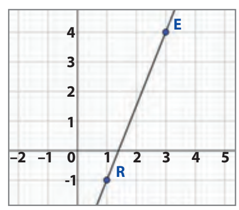
h. $m = 5$; Coordenada corte eje $Y = (0; 4,4)$

3. a. $g(x) = -x + 3$; $h(x) = -x - 2$

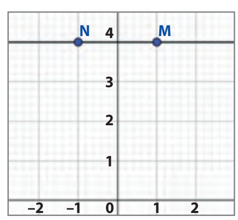
b. $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$; $h(x) = \frac{1}{2}x - 3$

c. $g(x) = \frac{1}{5}x + 4$; $h(x) = \frac{1}{5}x - 3$

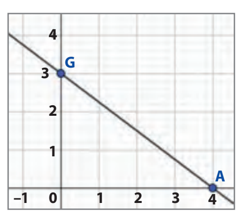
4. a. $m = 2,5$; Coordenada corte eje $Y = (0,-3,5)$



b. $m = 0$; Coordenada corte eje $Y = (0,4)$



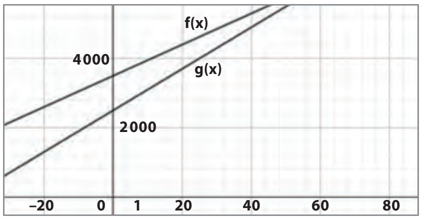
c. $m = -0,75$; Coordenada corte eje $Y = (0,3)$



5. **a.** Habla siempre: $f(x) = 45x + 3500$
Habla ya: $g(x) = 60x + 2500$

b. Al hablar 50 min, ¡Habla siempre! cobra \$5 750, mientras que ¡Habla ya! cobra \$5 500. Si se hablan 80 min, cobran \$7 100 y \$7 300, respectivamente.

c.



d. ¡Habla ya! es más conveniente si se hablan menos de 66,7 min.

Página 107

6. **a.** $T(x) = -4x + 5$. La temperatura a las 20:00 h será de –27 °C.

b. $h(x) = -6x + 240$. El nivel de agua luego de 40 min será de 0 cm.

c. $C(x) = 100x + 300$. Si se hablan 120 min se deberá pagar \$12 300.

7. El saldo final de Pedro es de \$165 000.

8. Las tres funciones tienen la misma pendiente, pero difieren en el punto de intersección con el eje Y.

9. **a.** Parte a 5 m respecto al origen.

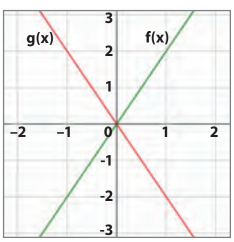
b. $f(x) = 5x + 5$

c. A los 15 min.

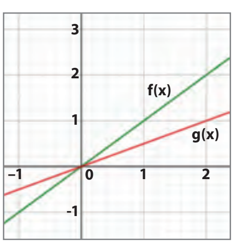
Página 109

Herramientas tecnológicas

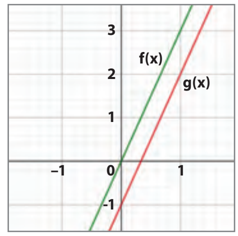
1. **a.** La semejanza es que ambas pasan por el (0, 0); la diferencia es la pendiente de las rectas.



b. La semejanza es que ambas pasan por el (0, 0), la diferencia es la pendiente de las rectas.

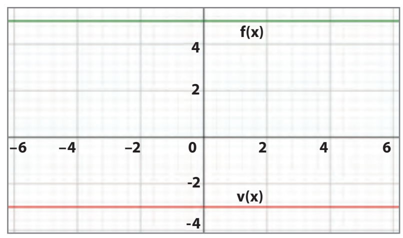


c. La semejanza es que ambas rectas tienen la misma pendiente y la diferencia es el punto en el cual cortan al eje Y.



d. La semejanza es que ambas rectas tienen la misma pendiente y la diferencia es el punto en el cual cortan al eje Y.

2. Sí, ya que todos los elementos de su dominio tienen una y sola una imagen en el recorrido.



Página 110

Evaluación Lección 3

1. **a.** Es una función, ya que elemento del conjunto de salida tiene una única imagen en el conjunto de llegada.

b. No es una función, ya que no todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen.

c. No es una función, ya que hay elementos del conjunto de salida con 2 imágenes.

d. Es una función, ya que elemento del conjunto de salida tiene una única imagen en el conjunto de llegada.

2. **a.** $Rec(f) = \{6, 3, 0, -3\}$

b. $Rec(f) = \{-3, 7, 17, 27\}$

3. $f(x)$: Afín decreciente
$g(x)$: Lineal decreciente
$k(x)$: Lineal creciente
$l(x)$: afín decreciente
$m(x)$: afín decreciente

4. **a.** "A" pertenece; "B" pertenece; "C" no pertenece; "D" no pertenece.
   b. "E" no pertenece; "F" pertenece; "G" pertenece; "H" no pertenece.

5. **a.** Función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$, con $m \neq 0$ y $c \neq 0$.
   b. Función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$, con $m \neq 0$ y $c \neq 0$.
   c. Función lineal, ya que es de la forma $y = mx$, con $m \neq 0$.
   d. Función lineal, ya que es de la forma $y = mx$, con $m \neq 0$.
   e. Función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$, con $m \neq 0$ y $c \neq 0$.
   f. Función afín, ya que es de la forma $y = mx + c$, con $m \neq 0$ y $c \neq 0$.

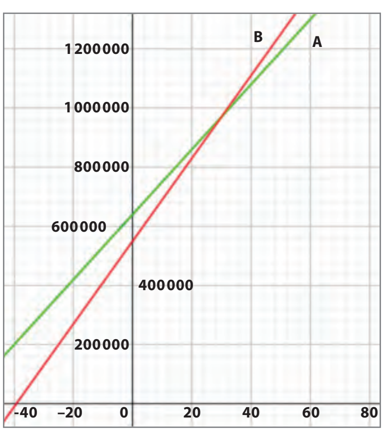
6. **a.** $m = 7$; Coordenada corte eje $Y = (0,1)$.
   b. $m = -1$; Coordenada corte eje $Y = (0,10)$.
   c. $m = -9$; Coordenada corte eje $Y = (0;-2,5)$.
   d. $m = -2$; Coordenada corte eje $Y = (0,0)$.
   e. $m = -\frac{3}{4}$; Coordenada corte eje $Y = (0,0)$.
   f. $m = 0$; Coordenada corte eje $Y = (0,-8)$.

Página 111

7. **a.** El ramo de rosas cuesta \$9 700.
   b. $f(x) = 900x + 700$

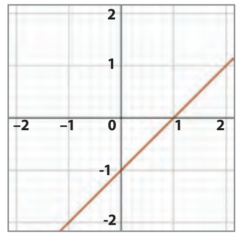
8. En 4 h el automóvil recorre 240 km. EL automóvil tarda 2 h en recorrer 120 km.

9. **a.** Empresa A: $f(x) = 11\,000x + 640\,000$
   Empresa B: $g(x) = 14\,000x + 550\,000$
   b. Si asisten 25 empleados, la empresa A cobra \$915 000, mientras que la empresa B cobra \$900 000. Si asisten 50 empleados, la empresa A cobra \$1 190 000, mientras que la empresa B cobra \$1 250 000.
   c.

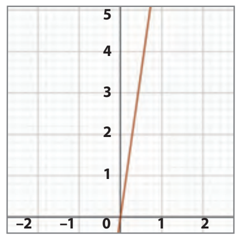


   d. Es más conveniente contratar la empresa B si van menos de 30 personas.
   e. Conviene contratar la empresa A, ya que cobra \$1 135 000, en vez de la empresa B que cobra \$1 180 000.

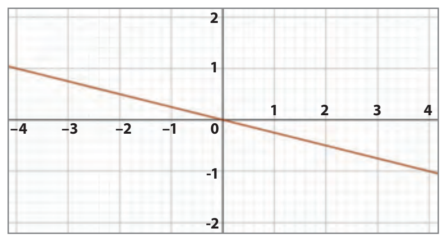
10. **a.**



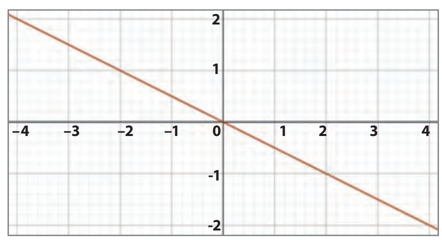
   b.



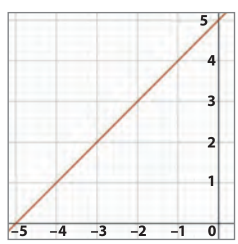
   c.



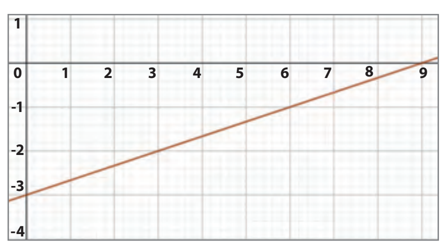
   d.



   e.



   f.



Página 112

Evaluación final

1. a. $P = (4y + 12)$ cm
   $A = (y^2 + 6y + 9)$ cm^2
   b. $P = (6x + 24)$ cm
   $A = (2x^2 + 21x + 27)$ cm^2
   c. $P = (2x + 100)$ cm
   $A = \left(\dfrac{-x^2}{2} + 15x + 500\right)$ cm^2

2. a. $p + m - 1$
   b. $m - p + 1$
   c. $-m^2 + 2mp + 2m - 4p$
   d. $-2m + 2p + 6$

3. a. $x = 10$
   b. $x = 3$
   c. $x = \dfrac{26}{3}$

4. a. $x < 20$
   b. $x > \dfrac{1}{5}$
   c. $x > -\dfrac{2}{9}$
   d. $x > -\dfrac{1}{8}$

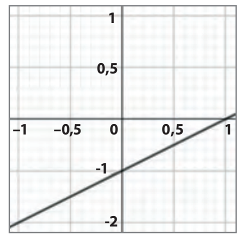
5. a. $2a + 8a = 120$
   Las dimensiones del rectángulo son 12 cm de ancho y 48 cm de largo.
   b. $\dfrac{x}{3} - 6 > 22$
   Los números son 85, 86, y 87.
   c. Un recién nacido debe dormir 17 h, mientras que una persona de 18 años debe dormir 8 h.

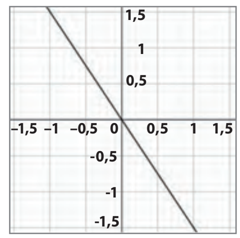
Página 113

6. a. -1 c. 11 e. 28
   b. 7 d. -20 f. -30

7. a. Es una función, ya que cada elemento del conjunto de salida tiene una única imagen en el conjunto de llegada.
   b. Es una función, ya que cada elemento del conjunto de salida tiene una única imagen en el conjunto de llegada.
   c. No es una función, ya que hay elementos en el conjunto de salida con más de una imagen en el conjunto de llegada.
   d. No es una función, ya que hay elementos en el conjunto de salida sin imagen en el conjunto de llegada.

8. $f(x)$ Función afín decreciente.
   $g(x)$ Función lineal decreciente.
   $h(x)$ Función afín creciente.
   $j(x)$ Función lineal creciente.
   $k(x)$ Función afín decreciente.

9. a.


   b.


10. $f(x) = \dfrac{x}{4} + 5$; $f(2) = 5{,}5$; $f(0) = 5$

Página 114

Síntesis y Repaso

Lección 1 Expresiones algebraicas

1. a. $4a + 2b$
   b. $-p - 12m$
   c. $-11x - 3y$
   d. $-8a - 2b$

2. a. $6a^3\, b$
   b. $20ma + 20mb$
   c. $a^2 + ab + 2a + 2b$
   d. $df + dg + ef + eg$

3. a. $P = 6x + 6y$
   $A = 2x^2 + 5xy + 2y^2$

Lección 2 Ecuaciones e inecuaciones

1. a. $x = -8$
   b. $x = -9$
   c. $x = 17$
   d. $x = -\dfrac{1}{2}$
   e. $x = 6$

2. a. $x < \dfrac{14}{3}$
   b. $x > -\dfrac{6}{5}$
   c. $x > -1$
   d. $x > 9$
   e. $x < \dfrac{99}{40}$

Página 115

Lección 3 Funciones

1. **a.** • $f(x) = \frac{x}{2} + 8$

 • Es una función afín.

 • $f(2) = 9$; $f(0) = 8$

 b. • $g(x) = 3x$

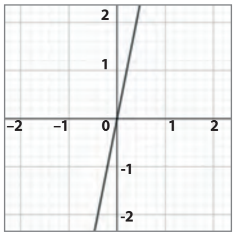
 • Es una función lineal.

 • $g(3) = 9$; $g(5) = 15$

2. Se muestra un ejemplo de tabla en cada caso.

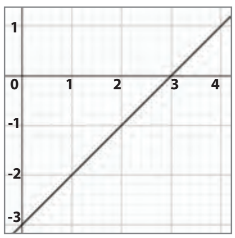
a.

x	$f(x)$
–2	–10
–1	–5
0	0
1	5
2	10



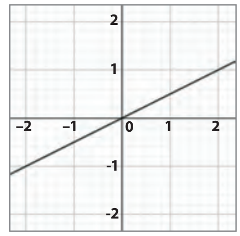
b.

x	$f(x)$
–2	–5
–1	–4
0	–3
1	–2
2	–1



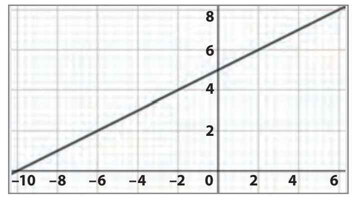
c.

x	$f(x)$
–2	–1
–1	–0,5
0	0
1	0,5
2	1



d.

x	$f(x)$
–2	4
–1	4,5
0	5
1	5,5
2	6



Unidad 3 • La geometría del arte Página 116

Página 116

Evaluación diagnóstica

1. **a.** Su área mide 44 cm²
 b. El perímetro es 31,4 cm
 c. Su área mide 379,94 cm²
2. 15,6 cm²
3. Prisma de base triangular: 5 caras
 Prisma de base pentagonal: 7 caras

Página 118

Lección 1 **Área y volumen de prismas y cilindros**

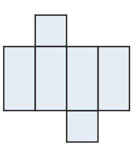
Área de prismas y cilindros

• Actividad a cargo del estudiante.

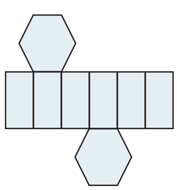
Página 123

Actividades

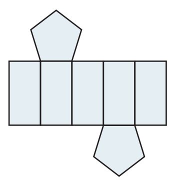
1. **a.**



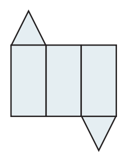
c.



b.

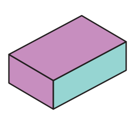


d.

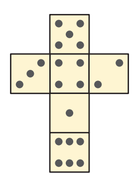


2. **a.** $A_b = 9$ cm²; $A_L = 54$ cm²; $A_T = 72$ cm²
 b. $A_b = 165{,}6$ cm²; $A_L = 480$ cm²; $A_T = 811{,}2$ cm²
 c. $A_b = 55{,}2$ cm²; $A_L = 264$ cm²; $A_T = 319{,}2$ cm²
 d. $A_b = 706{,}5$ cm²; $A_L = 715{,}92$ cm²; $A_T = 2128{,}92$ cm²
 e. $A_b = 19{,}625$ cm²; $A_L = 133{,}45$ cm²; $A_T = 172{,}7$ cm²
 f. $A_b = 170$ cm²; $A_L = 1.400$ cm²; $A_T = 1740$ cm²

3. **a.**



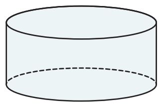
b.



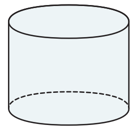
Página 124

Actividades

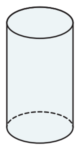
4. a. $A_T = 942$ cm^2



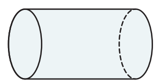
c. $A_T = 615{,}44$ cm^2



b. $A_T = 165{,}792$ cm^2



d. $A_T = 301{,}44$ cm^2



5. **a.** Se usaron 5,76 m^2 de tela.
   b. Dividir la figura en dos paralelepípedos genera una mayor área, ya que se originan más caras de dimensiones comparables a las de la primera división.
   c. 9 cm de lato y 3,5 cm de ancho.
   d. Su área es de 3,221012 m^2.
   e. Se necesitan 533,8 cm^2 de material.
   f. Se necesitan 79,128 m^2 de papel.
   g. Se necesitan 4 082 mm^2 de papel.
   h. Su área total disminuye a un cuarto de la original.

6. **a.** 101 307 cm^2
   b. 13 000 cm^2
   c. 76 000 cm^2

Página 125

7. **a.** El área total del soporte con las piezas es de 490 cm^2.
   b. El área total de las piezas es de 240,98 cm^2.

8. **a.** El área lateral es de: 376,8 m^2.
   b. Se dispone de 45,216 m^2.

9. Ambos rollos tienen igual área lateral, ya que se usa la misma cantidad de material.

10. No es correcto lo que afirma Josefina, ya que el perímetro del circulo es de 25,12, luego, el largo del rectángulo tiene la misma medida.
    Al duplicar la altura y mantener el diámetro, se duplica el área lateral. Lo mismo ocurre al duplicar el diámetro y mantener la altura.

Página 126

Volumen de prismas y cilindros

- Respuesta a cargo del estudiante.
- Un prisma es un poliedro cuyas caras laterales son paralelogramos y sus caras basales son paralelas y corresponden a polígonos congruentes.

Página 131

Actividades

1. **a.** 502,4 cm^3
   b. 265,33 cm^3
   c. 56 cm^3
   d. 127,16 cm^3
   e. 456 cm^3
   f. 1 208,9 cm^3
   g. 748,8 cm^3
   h. 828 cm^3

2. **a.** $A_B = 10{,}75$ cm^2
   $V = 129$ cm^3
   b. $A_B = 261$cm^2
   $V = 3\,915$ cm^3

3. B, C y A

Página 132

4. Se debe vaciar 4 veces el contenido de A para llenar B.

5. **a.** Perímetro base: 34,54 cm
   $A_b = 94{,}985$ cm^2
   $V = 1.139{,}82$ cm^3
   b. Perímetro base: 62,8 cm
   Radio: 10 cm
   $A_b = 314$ cm^2
   c. Radio: 2 cm
   $A_b = 12{,}56$ cm^2
   $V = 138{,}16$ cm^3

6. **a.** 1 130,4 cm^3
   b. 28,26 cm^3
   c. 3,925 cm^3
   d. 1 077,02 cm^3

7. **a.** Contiene 929,25 cm^3.
   b. Se necesitan 3 cubos para el ancho.
   c. Se pueden guardar 6 000 cajas.
   d. La tora tiene un volumen de 10 676 cm^3.
   e. La altura de la taza es de 9 cm.

Página 133

f. El envase de mayor diámetro contiene más mermelada. Su capacidad es de 759,88 cm^3, mientras que la del otro envase es de 552,64 cm^3.
g. Masa del cilindro de cobre: 2 515,14 g
Masa del cilindro de plata: 1 576,53 g
h. La afirmación es correcta, ya que tienen la misma profundidad, y el área del triángulo en la base es la mitad del área del rectángulo en la base. Sus volúmenes son 48 cm^3 y 24 cm^2, respectivamente.

8. a. F. Su volumen aumenta 6 veces.
   b. V. Ya que la fórmula es $V = Ah$, con lo que $A(3h) = 3V$
   c. F. Su volumen disminuye 6 veces.
   d. F. Su volumen aumenta 6 veces.
   e. F. Su volumen aumenta al doble.
   f. F. Su volumen aumenta 9 veces.
   g. F. Disminuye a una sexta parte.
   h. F. Su volumen aumenta 6 veces.

Página 134

Evaluación Lección 1

1. a. $A_T = 172{,}7$ cm^2; $V = 166{,}813$ cm^3
   b. $A_T = 864$ cm^2; $V = 1.728$ cm^3
   c. $A_T = 33$ cm^2; $V = 7{,}5$ cm^3
2. a. 300 cm^3
   b. 450 cm^3
   c. 350.730 cm^3
   d. 1 152 cm^3
3. a. Radio es de 30 m
   b. Radio es de 800 m
   c. Radio es de $10\sqrt{2}$ m

Página 135

4. La altura debe disminuir a la mitad para conservar la capacidad siendo esta de 9 cm.
5. La altura debe disminuir a un cuarto de la original para conservar la capacidad, siendo esta de 1 m.
6. a. Cubre una superficie de 196,25 cm^2.
   b. Para cubrir 1 m^2 necesita 51 rollos, sobrándole 8,75 cm^2.
7. a. El tubo A contiene 20,096 cm^3.
   b. El tubo B puede contener, como máximo, 36,1728 cm^3.
   c. Ambos tubos pueden contener la misma cantidad de líquido, ya que poseen el mismo volumen.

Página 136

Lección 2 Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

- Se relacionan mediante $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Página 138

Actividades

1. a. $x = 10$ cm
   b. $x = 13$ cm
   c. $x = 17$ cm
   d. $x = 5{,}2$ cm
2. a. $P = 36$ cm; $A = 54$ cm^2
   b. $P = 60$ cm; $A = 120$ cm^2
   c. $P = 7{,}2$ cm; $A = 2{,}16$ cm^2
   d. $P = 6$ cm; $A = 1{,}5$ cm^2
3. a. $x = 5$ cm; $y = 13$ cm
   b. $x = 15$ cm; $y = 10$ cm; $z = 2\sqrt{41}$
   c. $x = 4\sqrt{34}$ cm; $y = 21$ cm
4. a. Es trío pitagórico.
   b. No es trío pitagórico.
   c. Es trío pitagórico.
   d. Es trío pitagórico.

Página 139

5. a. Triángulo rectángulo, ya que sus lados siguen el teorema de Pitágoras.
   b. Triángulo rectángulo, ya que sus lados siguen el teorema de Pitágoras.
   c. No es triángulo rectángulo, ya que sus lados no siguen el teorema de Pitágoras.
   d. No es triángulo rectángulo, ya que sus lados no siguen el teorema de Pitágoras.
6. a. $P = 31$ cm; $A = 120$ cm^2
   b. $P = 18$ cm; $A = 15$ cm^2
   c. $P = 96$ cm; $A = 384$ cm^2
7. a. La relación anterior no se cumple, ya que el área del triángulo sobre la hipotenusa es 11,25 cm^2, mientras que la suma de los otros dos es 15,75 cm.
   b. Francisco recorrió más camino que Diego. Este recorre solamente 1 120 m, mientras que Francisco recorre $100\sqrt{106} + 1\,400$ m.

Página 140

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

- 25 m

Página 142

Actividades

1. a. $9\sqrt{3}$ cm^2
   b. 5 000 cm^2
   c. $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ cm^2
   d. $6\sqrt{3}$ cm^2
2. a. 15 cm^2
   b. 40 cm
   c. 32 cm^2
   d. $168\sqrt{3}$ cm
   e. $4\sqrt{3}$ dm
3. a. $5\sqrt{3}$ cm
   b. $\frac{2\sqrt{634}}{5}$ cm
   c. 25 cm

4. a. $\sqrt{13}$
   b. $2\sqrt{13}$
   c. $\sqrt{13}$
   d. $\sqrt{41}$
   e. $4\sqrt{2}$
   f. 5

Página 143

Actividades

5. a. La parte más alta de la escalera se encuentra a $2\sqrt{2}$ m del suelo.
   b. La longitud de la rampa es de 61 m.
   c. Julieta se encuentra a 60 m del punto.
   d. El perímetro es de 60 cm, mientras que su área es de $240\sqrt{30}$ cm^2.
   e. Sí, debido a que la diagonal de la puerta es de, aproximadamente, 221,54 cm. Mayor al lado de 210 del cuadrado.
   f. Es posible, ya que se forma el trío pitagórico con 3 + 4 + 5 = 12.

6. a. Sí, ya que siguen el teorema de Pitágoras.
   b. Mide 28,8 cm.

Página 145

Herramientas tecnológicas

1. La suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.
2. Se cumple solamente para triángulos rectángulos, ya que se deriva del teorema de Pitágoras.
3. Sean a y b las medidas de los catetos y c la medida de la hipotenusa, se tiene que la relación de las áreas es $a^2 + b^2 = c^2$, lo que es justamente el teorema de Pitágoras, razón por la que se cumple la relación anterior.

Página 146

Evaluación Lección 2

1. a. 12 cm
   b. 15 cm
   c. 6 cm

2. a. ✘   d. ✔
   b. ✘   e. ✘
   c. ✔   f. ✔

3. a. 29 cm
   b. 58 cm
   c. 14,5 cm

4. a. 13 cm
   b. 9,7 cm

Página 147

5. a. $A_T = 1\,539$ cm^2; $V = 4\,590$ cm^3
   b. $A_T = 8\,540{,}8$ cm^2; $V = 60\,288$ cm^3
   c. $A_T = 306\sqrt{3} + 675$ cm^2; $V = \dfrac{2\,025\sqrt{3}}{2}$ cm^3

6. a. La altura que alcanza la escalera es de $2\sqrt{15}$ m
   b. • Al parecer no se cumple con Pitágoras, pero se llega a un valor muy cercano (diagonal de 26,07 pulgadas). Esto se debe a que se aproximan los resultados.
      • Su alto mide aproximadamente 12,65 pulgadas.
      • Su largo mide aproximadamente 33,4 pulgadas.
      • El televisor 4 es de 50 pulgadas.

Página 148

Lección 3 Transformaciones isométricas

Traslación

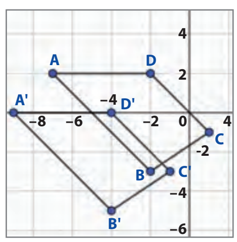
- Respuesta a cargo del estudiante.
- Se aplican sucesivas traslaciones.

Página 150

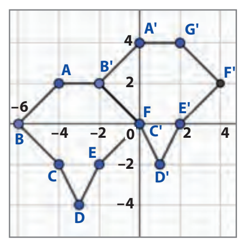
Actividades

1. a. (5, 6)
   b. (1, 6)
   c. (–6, –8)
   d. (2, 3)
   e. (5, 0)
   f. (2, –4)

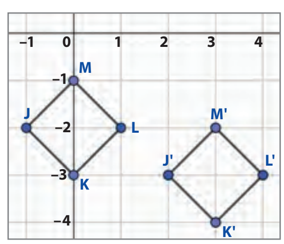
2. a.



b.



3. a. $\vec{v} = (1, 1)$
   b. $\vec{w} = (-1, -1)$
   c. Sus respectivas coordenadas son inversos aditivos.
   d. $M'(3, -2)$; $J'(2, -3)$; $K'(3, -4)$; $L'(4, -3)$



4. a. $\vec{v} = (4, 4)$
   b. $A''(13, -8)$

Página 152

Rotación

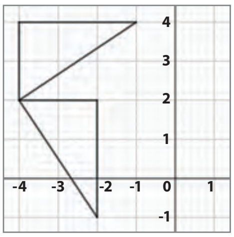
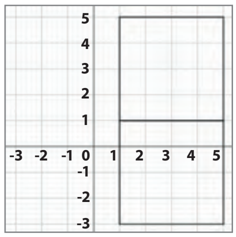
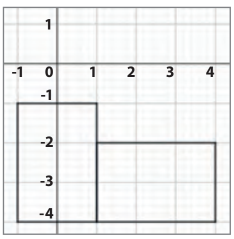
- Se debe aplicar una rotación. Se rotó en 180° en torno a un punto central entre los cuadros.

Página 154

Actividades

1. a. $A'(-5, 2)$
   b. $B'(6, -7)$
   c. $C'(5, -2)$

2. a. $D(6, -9)$ b. $E(-5, -3)$ c. $F(-4, 1)$

3. a.

c.

b.


4. a. 90° Sentido horario
   b. 180°
   c. 90° Sentido antihorario

Página 155

Herramientas tecnológicas

1. a. La medida de los ángulos se mantiene en la figura inicial y en la imagen al rotar.
   b. La medida de los lados se mantiene en la figura inicial y en la imagen al rotar. Esto es común con todas las transformaciones isométricas.

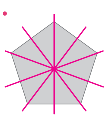
Página 156

Reflexión

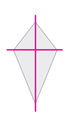
- En la primera figura hay más simetrías.
- Respuesta a cargo del estudiante.

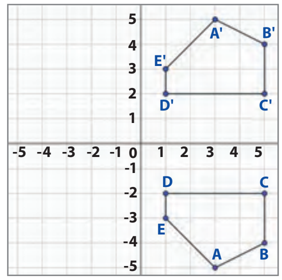
Página 158

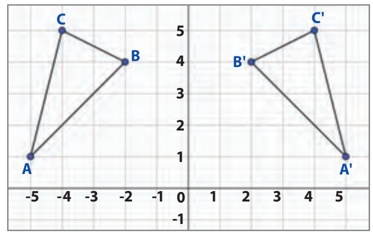
Actividades

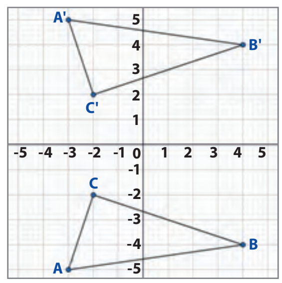
1. a.

b.

c.

d.


2. a.


b.


c.


3. a. (4, 1)
   b. (–2, 2)
   c. $M'(-4, 2)$; $M(-4, -2)$
   d. $M''(4, -2)$
   e. $N'(6, -5)$

Página 159

Herramientas tecnológicas

1. a. Los lados de la figura original, como de su imagen, tienen la misma medida.
   b. **Ejemplo 1:** Perímetro: 16 cm; Área: 16 cm^2 para ambas figuras.
   Ejemplo 2: Perímetro: 24 cm; Área: 36 cm^2 para ambas figuras.
   c. Ocurre lo mismo. Se conservan las medidas, ya que se trata de una transformación isométrica.
   d. Actividad a cargo del estudiante.

Página 160

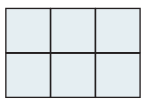
Composición de transformaciones isométricas

- Se aplica una rotación a la figura 1 para obtener la figura 2. Se aplica una traslación a la figura 1 para obtener la figura 3.

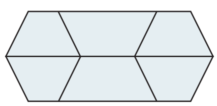
Página 162

Actividades

1. Se realizó una rotación en 180° para llegar a B, luego, se realizó una reflexión para llegar a C.
2. Se puede realizar mediante una serie de reflexiones. Primero una en torno a su lado AC. Luego, a esta imagen generada se le realiza otra reflexión en torno a su lado $B'C'$. Se repite el proceso hasta completar la figura (Nota: también se puede generar mediante rotaciones con sus respectivas traslaciones).
3. Se puede formar la figura mediante una serie de reflexiones del triángulo ABC en torno a la recta dibujada. También se puede lograr lo mismo mediante rotaciones en torno a un punto central de la recta.
4. **a.** Sí se puede teselar un plano con la figura.

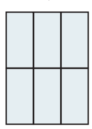


b. Sí se puede teselar un plano con la figura.



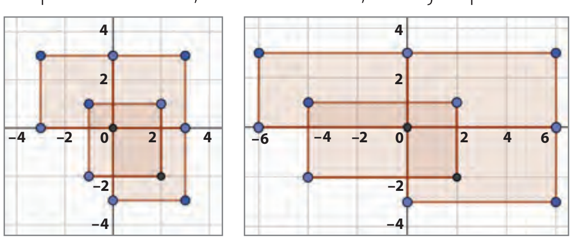
c. No es posible teselar un plano con la figura.

d. Sí se puede teselar un plano con la figura.

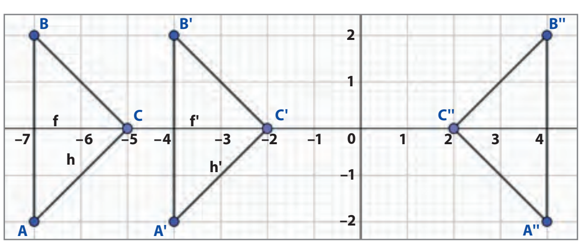


Página 163

5. Respuesta variada, a continuación, dos ejemplos.

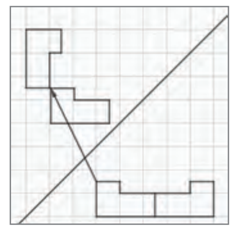


6.



Si se invierte el orden de las transformaciones, no se obtiene la figura en la misma posición, luego, no son operaciones conmutativas.

7. Se puede llegar al mismo resultado mediante una reflexión por una recta diagonal qur forme un ángulo de 45° con el eje X, seguida de una reflexión en torno a su lado $B'C'$, y finalmente una traslación para acomodar la figura generada en la posición en que se pide.



8. Hay más respuestas posibles, pero la más simple es:
Para encajar 1 en A se puede realizar una rotación en 90° sentido antihorario, seguido de una traslación.
Para encajar 2 en B se puede realizar una rotación en 90° sentido horario, seguida de una traslación.

Página 164

Transformaciones isométricas en el **espacio**

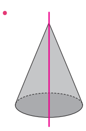
- Se relacionan en que partes de él se mueven, o rotan, sin cambiar sus dimensiones.
- Si una persona realiza un giro, este sucede fuera del plano, en el espacio.

Página 166

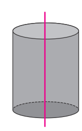
Actividades

1. **a.** No es plano de simetría.
b. Es plano de simetría.
c. Es plano de simetría.
d. Es plano de simetría.
e. Es plano de simetría.
f. No es plano de simetría.

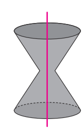
2. **a.**



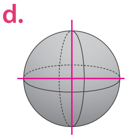
b.



c.

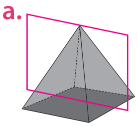


d.

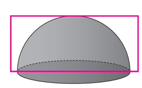


Nota: la esfera tiene infinitos ejes de rotación, se marcaron 2.

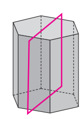
3. **a.**



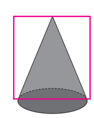
b.



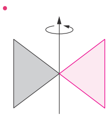
c.



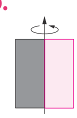
d.



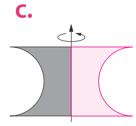
4. **a.**



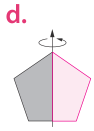
b.



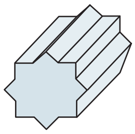
c.

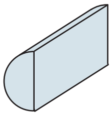


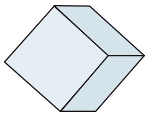
d.

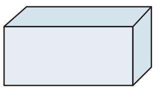


Página 167

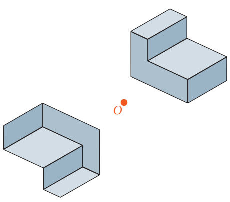
5. a.


b.


c.


d.


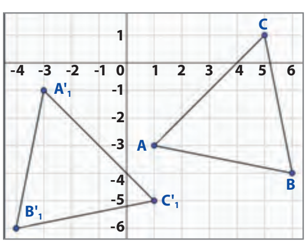
6.

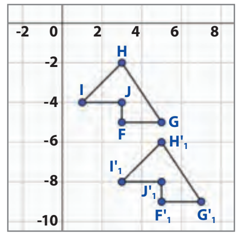

7.


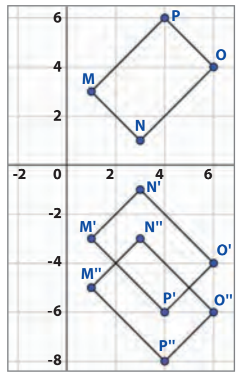
8. a. F. Es un sólido de traslación.
b. F. Hay otros cuerpos con más planos de simetría, por ejemplo, el cubo tiene 9.
c. V.
d. F. Tiene infinitos planos de simetría.
e. F. El único plano de simetría de un cilindro paralelo a la base es el que pasa por la mitad de su altura.
f. V.

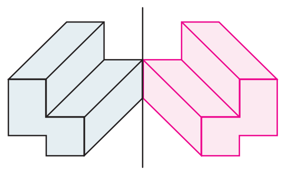
Página 168

Evaluación Lección 3

1. a.


b.


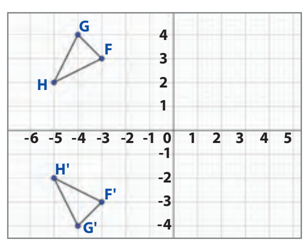
c.


d.


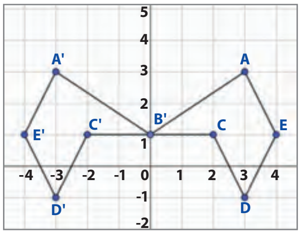
2. a. F.
b. F.
c. F.
d. V.

3. • 180°
• 270
• 90°

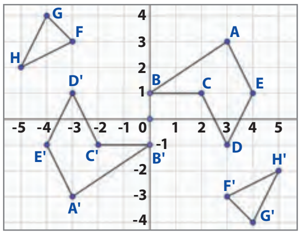
Página 169

4. a. $F'(-3,-3)$; $H'(-5,-2)$; $G'(-4,-4)$


b. $A'(–3,3)$; $B(0,1)$; $C(–2,1)$; $D(–3,–1)$; $E(–4,1)$



c. $A'(–3,–3)$; $B'(0,–1)$; $C'(–2,–1)$; $D'(–3,1)$; $E'(–4,–1)$; $F'(3,–3)$; $G'(4,–4)$; $H'(5,–2)$



5. **a.** Se aplicó una traslación.

b. • Se aplicó una rotación.

• En 90°.

c. El Cairo es reflejo de Lesotho respecto a la línea del ecuador, y Brasilia es reflejo de Antananarivo respecto al meridiano de Greenwich.

Página 170

Evaluación final

1. **a.** $A_T = 118$ cm²; $V = 45$ cm³

b. $A_T = 135{,}5$ cm²; $V = 102{,}375$ cm³

c. $A_T = 1\,582{,}56$ cm²; $V = 4\,069{,}44$ cm³

d. $A_T = 791{,}28$ cm²; $V = 1\,695{,}6$ cm³

e. $A_T = 1\,569$ cm²; $V = 2\,304$ cm³

f. $A_T = 5\,000$ cm²; $V = \dfrac{125\,000\sqrt{3}}{9}$ cm³

2. **a.** 2 cm

b. 9 cm

c. 0,65 cm

3. **a.** La cantidad máxima que puede contener es de 58.875 cm³.

b. Se necesitan 2 956 cm² de papel.

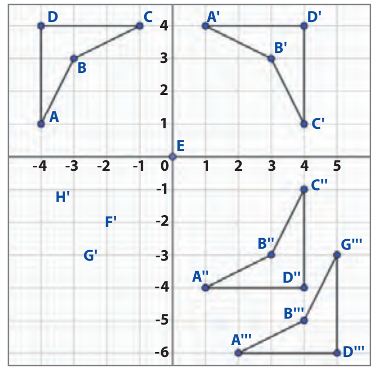
c. Su área total es de 832 cm², y su volumen es de 1 344 cm³.

Página 171

d. La altura del cilindro es de 3 m.

e. Las coordenadas del punto resultante son: $A''(–5, 5)$.

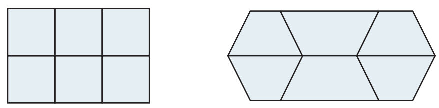
4.



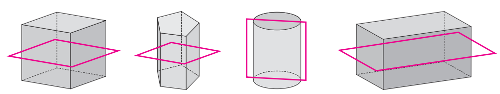
5. **a.** La teselación está compuesta por cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares.

b. Es posible realizar la teselación, ya que se tiene que la suma de los ángulos internos de todas las figuras que comparten un vértice suman 360°.

c. Pregunta variada. A continuación, se muestran 2 ejemplos:



6. Nota: Hay más planos de simetría posibles.



Página 172

Síntesis y Repaso

Lección 1 Área y volumen de prismas y cilindros

1. **a.** $A_B = 9$ cm²; $A_L = 54$ cm²; $A_T = 72$ cm²

b. $A_B = 55{,}8$ cm²; $A_L = 144$ cm²; $A_T = 255{,}6$ cm²

2. **a.** $A_B = 113{,}04$ cm²; $A_L = 339{,}12$ cm²; $A_T = 565{,}2$ cm²

b. $A_B = 50{,}24$ cm²; $A_L = 252{,}2$ cm²; $A_T = 351{,}68$ cm²

3. **a.** 7,5 cm³

b. 282,6 cm³

Página 173

Lección 2 Teorema de Pitágoras

1. **a.** $a = 17$ cm

b. $a = 4\sqrt{61}$ dm

2. **a.** Corresponde a triángulo rectángulo.

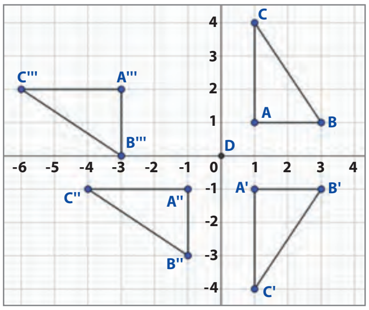
b. No corresponde a triángulo rectángulo.

3. La altura de la capa es de 150 cm.

Lección 3 Transformaciones isométricas

1. $A'(-3, 0)$, $B'(4, 2)$, $C'(3, 7)$

2.



3. $A''(2, -2)$

4. a. Sí se puede teselar, ya que sus ángulos internos son de 120°, con lo que se puede dividir el ángulo de 360° sin dejar espacios.
   b. No se puede teselar, ya que sus ángulos internos son de 108°, con lo que no se puede dividir el ángulo de 360° sin dejar espacios.
   c. Sí se puede teselar, ya que sus ángulos internos son de 60°, con lo que se puede dividir el ángulo de 360° sin dejar espacios.

Unidad 4 • El deporte

Página 175

- Cuando su rendimiento en función de alguna variable es mejor que la de otro.
- Se pueden documentar los tiempos de carrera de competidores de una carrera o los tiempos para un solo deportista y así ver su evolución. Se pueden tener estadísticas de los goles convertidos por los jugadores de fútbol en un determinado torneo o temporada.
- Resouesta a cargo del estudiante.

Evaluación diagnóstica

1. {(c, c); (c, s); (s, c); (s, s)}
2. La probabilidad es $\frac{1}{8}$.
3. La probabilidad de obtener menos de 4 puntos al lanzar un dado es de $\frac{3}{6}$.
4. a.

¿Cuántas veces juegas fútbol a la semana?	
Cantidad de días	f
0	1
1	6
2	3
3	5
4	5
5	3
6	1
7	1
Total	25

   b. En promedio los niños y niñas juegan 3 veces a la semana fútbol.

Página 176

Lección 1 Estadística

Representaciones gráficas

- A la falta de tiempo libre, o a la necesidad de realizar otras actividades.
- Respuesta a cargo del estudiante.
- Respuesta a cargo del estudiante.

Página 180

Actividades

1. a. Gráfico circular porque es más fácil representar porcentajes en él.
   b. Gráfico de línea o de barra porque representan de mejor forma variables cualitativas o cuantitativas.
   c. Gráfico de línea porque es una variable numérica que varía en el tiempo.
   d. Gráfico de barra porque representan de mejor forma variables cualitativas o cuantitativas.
   e. Gráfico circular porque es más fácil representar porcentajes en este tipo de grafico.
   f. Gráfico circular porque es más fácil representar porcentajes en este tipo de grafico.
2. a. 9 estudiantes tienen como mascota un gato o un roedor.
   b. 55 jóvenes prefieren voleibol.
   165 el tenis o el atletismo.
   Fueron encuestados 550 jóvenes.
   c. El intervalo de 31 a 44 años presenta la mayor frecuencia.
   El intervalo de 70 a 83 años presenta la menor frecuencia.

Se recaudaron $672 500 por las entradas.
Asistieron 86 personas de las cuales 48 eran menores de 44 años.

Página 181

3. **a.** La semejanza es que ambos utilizan barras para representar la frecuencia, la diferencia es que los histogramas son utilizados para intervalos y los gráficos de barra para variables cualitativas o cuantitativas que no estén en intervalos.

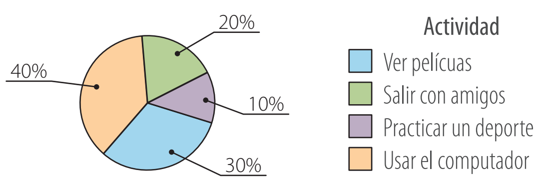
b. Ambos gráficos representan los mismos tipos de variables, la única diferencia entre ellos es la representación gráfica (líneas contra barras) y que el grafico de líneas tiene un uso para visualizar tendencias.

c. Cuando la información es de carácter porcentual.

4. **a.**

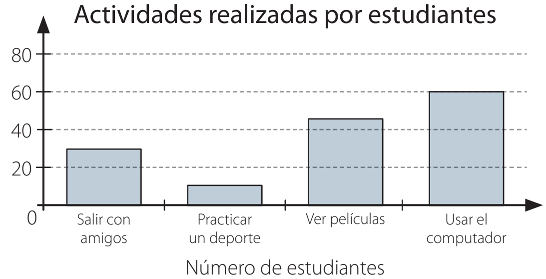
Actividad Preferida	
Actividad	f
Salir con amigos	30
Practicar un deporte	15
Ver películas	45
Usar el computador	60
Total	150

Actividad Preferida



b.

Actividades realizadas por estudiantes

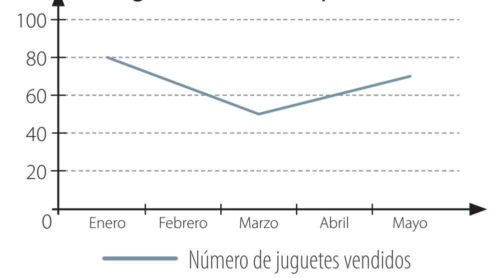


c. 45 estudiantes prefieren salir con amigos o practicar un deporte. Es cierto que no alcanzan a ser un tercio del total de encuestados porque un tercio equivale a $33,\overline{3}\%$.

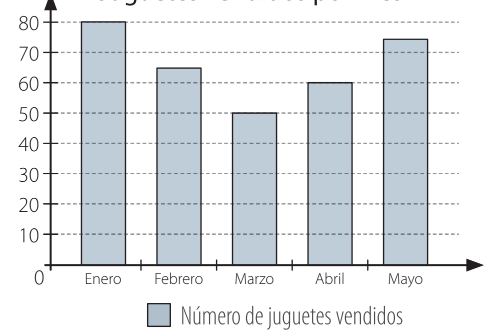
d. Es verdad, debido a que en conjunto suman un 70% de los encuestados.

5.

Juguetes vendidos por mes



Juguetes vendidos por mes



Página 182

Medidas de posición

- Es un deporte con varias modalidades en el cual se utilizan distintos tipos de bicicletas.
- El menor dato es 160 y el mayor 172.

  {(160, 160, 160, 162); (162, 162, 164, 164); (164, 166, 168, 168); (168, 170, 170, 172)}

Página 186

Actividades

1. **a.** $Q_1 = 5$, $Q_2 = 7$; $Q_3 = 10$

b. $Q_1 = 7{,}5$; $Q_2 = 20$; $P_{50} = 20$

c. $P_{20} = 52$, $P_{50} = 56$; $P_{80} = 62$

d. $P_{10} = 2{,}3$; $Q_3 = 7{,}875$; $P_{75} = 7{,}875$

e. $P_{10} = 10{,}4$; $Q_3 = 21$; $P_{35} = 15{,}45$

f. $Q_1 = 100$; $P_{12} = 100$; $P_{92} = 110$

Página 187

2. **a.** $Q_1 = 3$; $Q_2 = 4$; $P_{50} = 4$; $Q_3 = 4$

$P_{75} = 4$; $P_{80} = 4$; $P_{99} = 4$

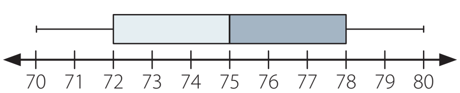
b. $Q_1 = 90$; $Q_2 = 95$; $Q_3 = 105$

$P_{10} = 88$; $P_{60} = 100$; $P_{90} = 110$

3. a. El valor del primer cuartil de los datos es 170,5 y el del tercero es 216,5.
   b. 11 alumnos se ubican bajo el segundo cuartil y tienen entre 1 y 2 hermanos.
   c. 4 estudiantes se ubican sobre el percentil 80 y su estatura debe ser mayor a 1,68.
4. Actividad en clases.
5. No, debido a que el percentil 50 corresponde a tres mascotas, por lo que se puede afirmar que el 50% de los estudiantes tienen 3 mascotas o menos.

Página 188

6. a. El presupuesto asignado era de $21 800.
   b. El P_{15}.
   c. Corresponde al valor asignado, sobre el cual el 85% de los mensajeros gastaron más dinero en el combustible.
7. El percentil 80 corresponde a 89,5 y esto significa que el 20% de los cultivos demoraron más de 89,5 minutos en reproducirse, o que el 80% se demoró menos de 89,5 minutos.
8. a. $Q_1 = 43$; $Me = 48$
   $Q_3 = 63$; $Ric = 22$
   Mín. = 23, Máx. = 68
   b. $Q_1 = 38$; $Me = 53$
   $Q_3 = 63$; $Ric = 25$
   Mín. = 33, Máx. = 73
   c. $Q_1 = 28$; $Me = 43$
   $Q_3 = 68$; $Ric = 40$
   Mín. = 23, Máx. = 68
9.



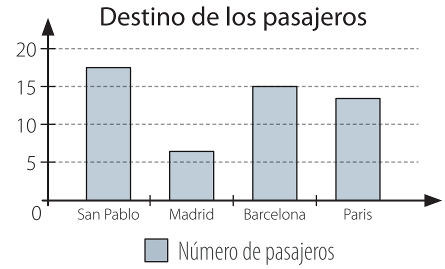
Página 190

Evaluación Lección 1

1. a.

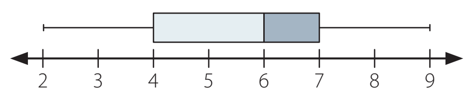
¿Cuál es el destino?		
Ciudad de destino	f	f(%)
San Pablo	18	37,5
Madrid	6	12,5
Barcelona	15	31,25
París	9	18,75
Total	48	100

   b. El gráfico 1 es el que representa correctamente los datos de la tabla 1.
   c. No, porque los pasajeros que van a Madrid y Barcelona son solo un 43,75%.
   d.

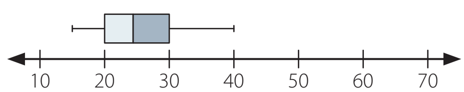


Página 191

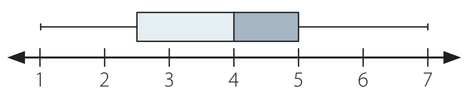
2. a. Los cuartiles son $Q_1 = 4$; $Q_2 = 6$; $Q_3 = 7$.
   b.



   c. Cuatro personas, que son las que obtuvieron más de 7 puntos.
   d. Diez personas podrían rendir el test nuevamente.
3.



4.



Página 192

Lección 1 **Probabilidades**

Principio multiplicativo

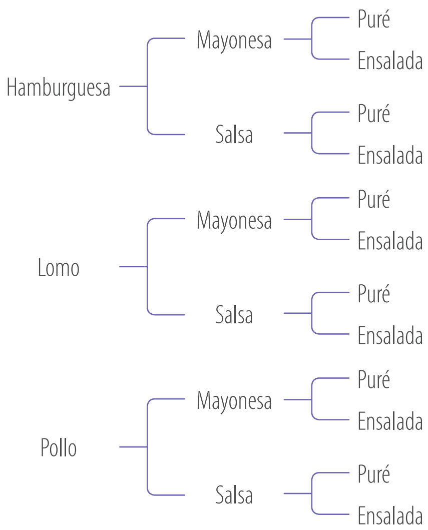
- Deben jugar 3 partidos.
- Tienen una probabilidad de $\frac{1}{8}$.

Página 195

Actividades

1. a. Sí se puede aplicar. Pueden llegar de 243 formas.
   b. No se aplica el principio multiplicativo.
   c. Los resultados posibles se pueden calcular mediante el principio multiplicativo. Se pueden obtener 1 296 resultados diferentes.
   d. Se puede calcular mediante el principio multiplicativo. Se pueden ubicar de 12 maneras diferentes.
   e. Se puede calcular mediante el principio multiplicativo. Se pueden tener 32 resultados diferentes.
   f. Se puede calcular mediante el principio multiplicativo. Se pueden tener 24 resultados diferentes.

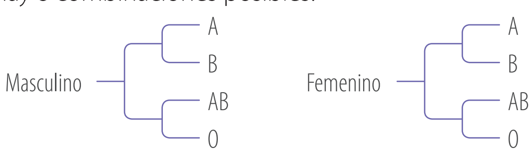
2. a.



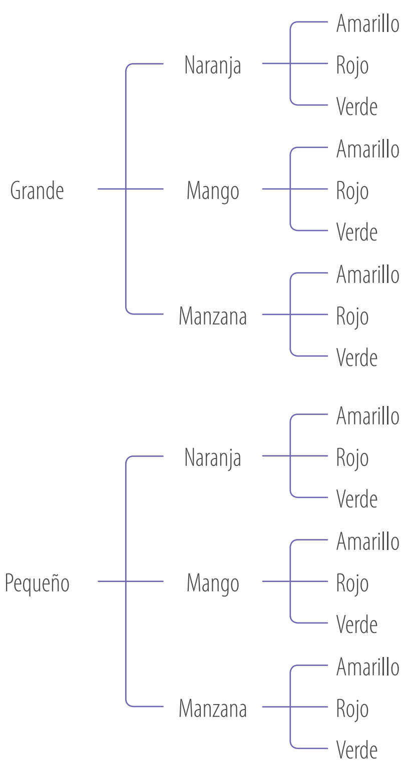
b. 6 de los menús tendrán puré.

c. 3 de los menús tendrán mayonesa y puré.

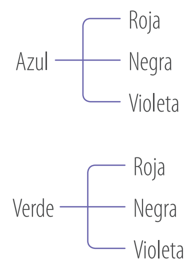
3. Hay 8 combinaciones posibles.



b. Hay 18 combinaciones posibles.

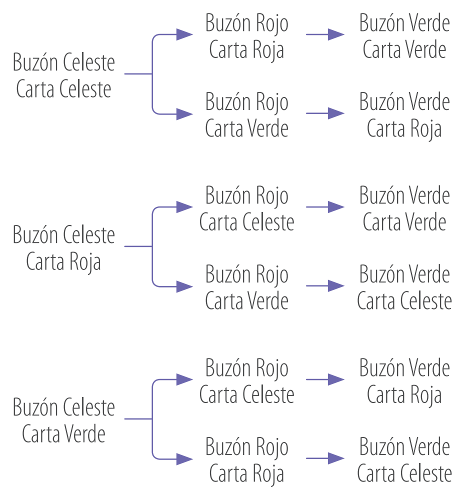


c. Hay 6 combinaciones posibles.



Página 196

4. Hay solo 6 posibilidades porque una vez ingresado un sobre a un buzón solo quedan dos para repartir entre los otros dos buzones.



5. a. {(R, A); (R, V); (R, B); (A, R); (A, V); (A, B); (B1, A); (B1, R); (B1, B); (B2, R); (B2, V); (B2, A)}

b. Respuesta variada. A continuación se muestra un ejemplo. Una persona tiene una camisa roja, una azul y dos blancas, y también tiene pantalones azules, rojos, blancos y verdes. Si la persona no puede usar el mismo color de camisa y pantalón, excepto si es la primera camisa blanca, la cual sí puede utilizar con el pantalón blanco, pero no puede usarla con el pantalón verde, ¿cuál es la cantidad de combinaciones que tiene para vestirse?

6. Andrés puede estar 24 meses sin repetir su clave de cuenta de ahorros.

7. a. Se pueden formar 5 040 mensajes diferentes.

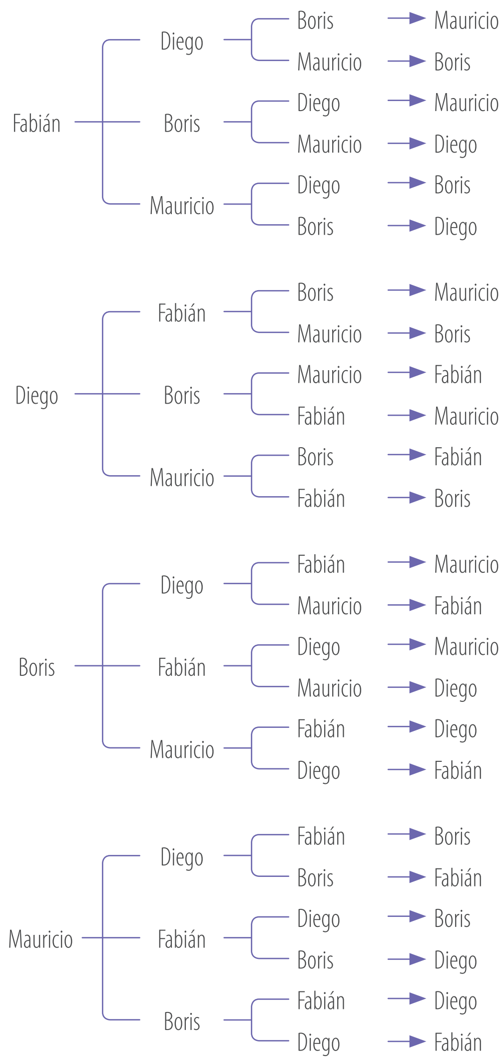
b. 120 mensajes pueden cumplir con esa configuración.

c. Se pueden formar 840 mensajes.

d. Se pueden formar 343 mensajes.

Página 197

8. a.

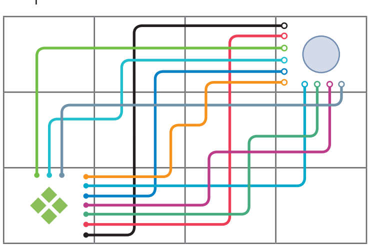


b. Se pueden ubicar de 24 maneras diferentes.

c. Se pueden ordenar de 6 maneras diferentes.

d. Está en lo correcto, dado que de las dos formas quedan libres solo dos puestos para realizar las combinaciones.

9. a. Se pueden realizar 10 caminos.



b. 7 movimientos parten por la derecha.

c. 5 movimientos terminan hacia arriba.

Página 198

Cálculo de probabilidades

- Un cincuenta por ciento.
- Otro día es el fútbol.

Página 201

Actividades

1. a. Los casos favorables son 10: el 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29.

b. Los casos favorables son 3: la e, i y o.

c. Los casos favorables son 3: el 4, 8 y 12.

2. a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{4}$

3. a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{13}$

c. $\frac{12}{13}$

d. $\frac{1}{2}$

4. {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

a. De una sola forma.

b. La probabilidad es de $\frac{1}{36}$.

5. $C < A < B < D$

6. a. $\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{64}$

c. $\frac{1}{4}$

Página 202

7. a. La probabilidad es de $\frac{1}{64}$.

b. La probabilidad es de $\frac{7}{8}$.

c. Eduardo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19 Mario: 4, 8 y 12. Claramente no tienen la misma probabilidad de ganar.

d. La probabilidad de un suceso es 1 cuando es un evento seguro, es decir, cuando el suceso es equivalente al espacio muestral. La probabilidad de un suceso es 0 cuando es un evento imposible, es decir, no pertenece al espacio muestral.

Un suceso no puede tener una probabilidad de 1,5, ya que la certeza es máxima cuando es 1.

e. Ambos tienen la misma probabilidad de ganar ya que el espacio muestral se compone por cuatro elementos {(c, c); (c, s); (s, c); (s, s)}.

8. **a.** $\frac{1}{3}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{3}$

d. $\frac{2}{3}$

Página 203

Herramientas tecnológicas

Respuesta variada. A continuación se muestra un ejemplo.

1.

Número	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	2	3	4	3	4	4

a. La frecuencia relativa de 3 es 0,2. La probabilidad de obtener 3 en un dado es de $0,1\overline{6}$. Se relacionan en que al aumentar el número de lanzamientos, se obtendrá una frecuencia relativa cada vez mas cercana a su valor teórico.

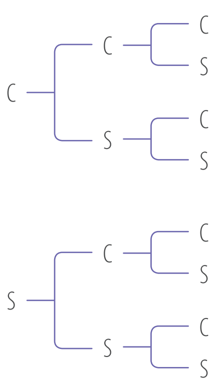
b. El espacio muestral es Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Los resultados en la práctica no son equiprobables. Esto es debido a que se tiene un número bajo de experimentos.

c. Al aumentar los experimentos, las frecuencias relativas se acercan a sus valores teóricos.

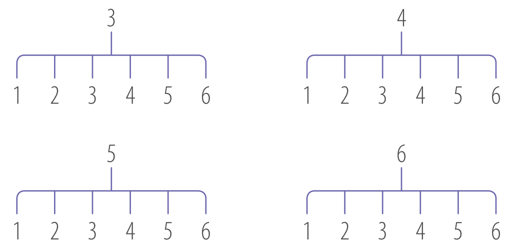
Página 204

Evaluación Lección 2

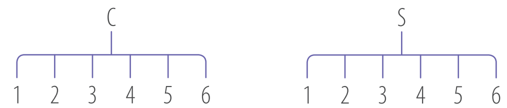
1. **a.**



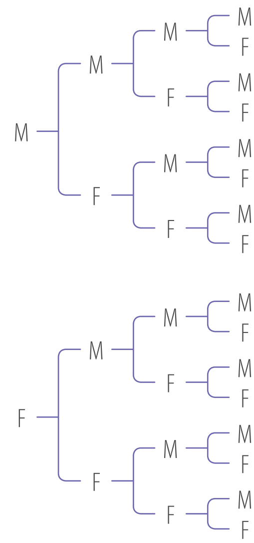
b.



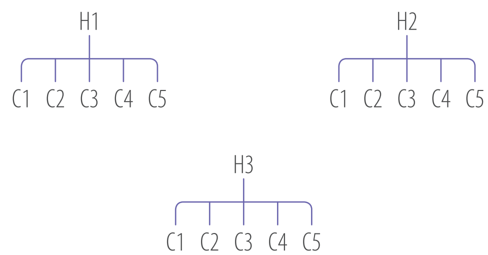
c.



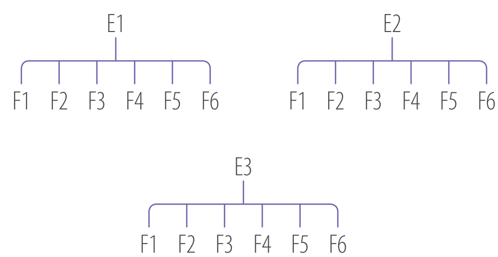
d.



e.



f.



2. a. Una persona tiene un pañuelo azul y rojo y dos pares de guantes, amarillos y cafés. ¿De cuántas formas se puede vestir?
   b. En una clase de baile hay dos hombres y tres mujeres. ¿De cuántas formas se pueden formar parejas de un hombre con una mujer?
   c. Karla tiene una falda y un pantalón, una blusa y una polera y unas zapatillas y unas sandalias. ¿De cuántas formas se puede vestir Karla?

3. a. La probabilidad es de $\frac{5}{36}$.
   b. La probabilidad es de $\frac{1}{6}$.
   c. La probabilidad es de $\frac{1}{6}$.
   d. La probabilidad es de $\frac{1}{6}$.
   e. La probabilidad es de $\frac{11}{12}$.
   f. La probabilidad es 0.

Página 205

4. a. La probabilidad es de $\frac{1}{32}$.
   b. La probabilidad es de $\frac{5}{16}$.
   c. La probabilidad es de $\frac{31}{32}$.
   d. La probabilidad es de $\frac{13}{16}$.
   e. La probabilidad es de $\frac{5}{16}$.
   f. La probabilidad es de $\frac{5}{16}$.

5. a. Se pueden formar 60 números diferentes.
   b. La probabilidad es de $\frac{2}{5}$.

6. Conviene elegir el recipiente B.

7. a. Respuesta a cargo del estudiante.
   b. Se pueden tener 24 formas de menú.

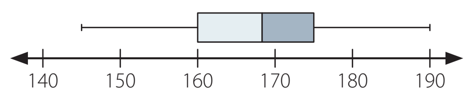
Página 206

Evaluación final

1. a. Se encuestaron 94 canciones.
   b. 20 estudiantes tienen 2 hermanos.
   c. Aproximadamente el 51,06% de los estudiantes tiene menos de 2 hermanos.

2. 105 estudiantes no prefieren el fútbol.

3. a. El percentil 70 es 175.
   b. El $Q_3 = 175$, lo cual quiere decir que el 75% de los datos son menores o iguales que 175.
   c. Se podría participar hasta 161 cm.
   d.



   e. Los participantes deben medir 174 o más.

Página 207

4. a. $18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 9 \cdot 10 = 9\,447\,840$ patentes diferentes.
   b. $18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 9 \cdot 5 = 4\,723\,920$ patentes terminan con un dígito impar.
   c. $18 \cdot 9 \cdot 10 = 1\,620$ patentes tienen todas sus letras iguales.

5. Hay 12 posibles diseños del polerón.

6. La probabilidad es $\frac{3}{5}$.

7. La probabilidad es de $\frac{144}{5\,040}$.

Página 208

Síntesis y Repaso

Lección 1 Estadística

1. a. Gráfico de líneas para poder ver tendencias de la temperatura.
   b. Gráfico de barras debido a que son variables cualitativas.
   c. Un histograma, dado que las estaturas pueden ser muy variables y son más apreciables por intervalos.

2. $Q_1 = 19$; $Q_2 = 26$; $P_{70} = 33$ y $P_{90} = 37$

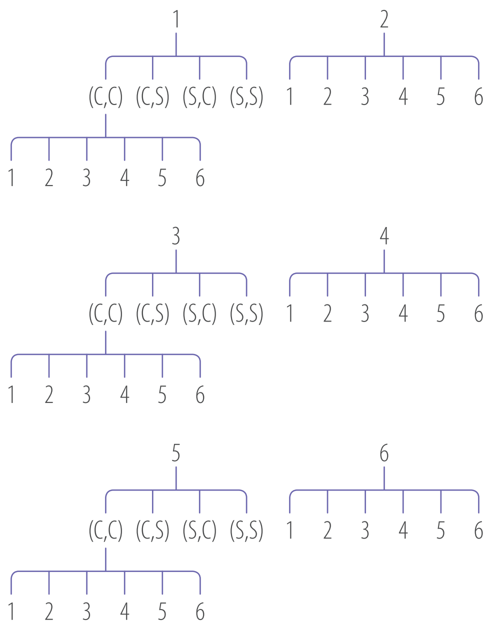
3. **a.** La distancia de la ciudad más cercana del puerto está a 34 km.

b. El tercer cuartil corresponde a 56 km, lo cual significa que el 75% de las ciudades se encuentran a menos de 56 km.

Página 209

Lección 2 Probabilidad

1. **a.**



b. Son 45 combinaciones diferentes.

2. **a.** Se puede otorgar de 60 formas diferentes.

b. Se puede otorgar de 3 maneras diferentes.

3. La probabilidad de pasar por E es $\frac{2}{3}$.

Glosario

A

Abscisa: valor que se representa en el eje horizontal o eje X en el plano cartesiano.

Altura: cada uno de los segmentos perpendiculares trazados desde un vértice de una figura al lado opuesto o a una prolongación de éste.

Ángulo interior: es el formado por dos lados contiguos de un polígono y se encuentra dentro de este.

Área: medida de una superficie.

B

Base de una potencia: corresponde al factor que se repite en una potencia.

C

Círculo: región o área del plano delimitada por una circunferencia.

Coeficiente numérico: constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Cuadrado: cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores miden 90° y sus lados tienen la misma medida.

Cuadrilátero: región del plano limitada por cuatro segmentos, entre los cuales no hay tre colineales.

D

Decimal finito: número decimal con una cantidad finita de cifras decimales.

Diámetro: cuerda de mayor longitud en una circunferencia.

E

Ecuación: igualdad entre expresiones algebraicas que solo se cumple para algunos valores de la incógnita.

Eje de simetría: recta que divide una figura en dos partes de igual forma y tamaño.

Evento: subconjunto del espacio muestral.

Experimento aleatorio: experimento en el que no se tiene certeza de lo que pasará. Por lo tanto, no se puede predecir su resultado.

Expresión algebraica: términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción.

Exponente: término de una potencia que indica cuántas veces se repite la base.

F

Factor literal: parte no numérica de un término algebraico.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un determinado valor en la variable estadística que se estudia.

H

Histograma: es un gráfico de barras contiguas donde la altura de cada barra es proporcional a la frecuencia absoluta, y su base está constituida por un segmento cuyos extremos representan los extremos de cada intervalo.

I

Incógnita: cada una de las variables que aparecen en una ecuación o inecuación que son desconocidas.

Inecuación: desigualdad en la que aparecen una o más incógnitas.

L

Longitud: distancia entre dos puntos.

M

Media aritmética ($\bar{x}$): promedio entre todos los datos de una distribución estadística.

Mediana (Me): valor que ocupa el lugar central en una distribución de datos.

N

Números enteros ($\mathbb{Z}$): conjunto numérico formado por los números naturales ($\mathbb{N}$), el cero y los inversos aditivos de los números naturales.

Número decimal: número formado por una parte entera y una parte decimal separada por una coma decimal.

Números negativos ($\mathbb{Z}^-$): subconjunto de los números enteros compuesto por los inversos aditivos de los números naturales.

Número mixto: número representado por un número entero y por una fracción.

O

Ordenada: valor que se representa en el eje vertical (eje Y) en el plano cartesiano.

Origen: punto en el que se intersecan los ejes del plano cartesiano. Se representa con el punto (0, 0).

P

Paralelógramo: cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

Par ordenado: en el plano cartesiano corresponde a una dupla de elementos, el primero indica la abscisa y el segundo la ordenada.

Perímetro (P): longitud del borde de una figura. En un polígono se calcula como la suma de las medidas de sus lados.

Pi (π): número irracional que corresponde a la razón entre el perímetro (P) y el diámetro de un círculo.

Plano cartesiano: es el plano euclidiano provisto de un sistema de coordenadas en el que se distinguen dos ejes perpendiculares (rectas numéricas) que determinan cada punto en el plano.

Población: conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se desea estudiar una o varias características.

Polígono: figura plana formada por una línea poligonal cerrada y su interior.

Polígono de frecuencias: gráfico que se obtiene al unir los puntos correspondientes a la marca de clase de cada intervalo.

Porcentaje: razón cuyo consecuente es 100. Se representa por el símbolo %.

Potencia: expresión usada para indicar la multiplicación de un factor por sí mismo una determinada cantidad de veces.

Probabilidad: posibilidad de ocurrencia de un evento. Toma valores entre 0 y 1, pero también se puede escribir como porcentaje.

Proporción: igualdad de dos razones.

Proporcionalidad directa: dos variables están en proporcionalidad directa si su razón es constante.

Proporcionalidad inversa: dos variables están en proporcionalidad inversa si su producto es constante.

R

Radio: segmento de recta que une el centro de una circunferencia con un punto de ella.

Razón: comparación de dos números mediante el cociente entre ellos.

Rectángulo: paralelógramo en el que sus ángulos interiores miden 90° y sus lados opuestos tienen la misma medida.

Reflexión: transformación isométrica en el plano que consiste en reflejar una figura a partir de una recta llamada eje de reflexión.

Regla de Laplace: forma de calcular la probabilidad de un evento, determinando el cociente entre los casos favorables y los casos posibles, en un experimento aleatorio, cuando sus resultados son equiprobables.

Rombo: paralelógramo cuyos lados son todos de igual medida y sus ángulos interiores opuestos son iguales (dos ángulos son agudos y los otros dos obtusos).

Romboide: paralelógramo en el que sus lados opuestos miden lo mismo y la medida de sus ángulos interiores opuestos es la misma.

T

Término algebraico: cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

Trapecio: cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

V

Vector: segmento orientado determinado por su origen y su extremo. Se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido.

Bibliografía y Webgrafía

Bibliografía

- Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Blank, W. (1997). *Authentic instruction*. Tampa, FL: University of South Florida.
- Bruner, J. S. (1969). *Hacia una teoría de la instrucción*. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Duval, R. (1988). *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros*. Traducción del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Enlaces (2013). *Desarrollo de las habilidades digitales para el siglo XXI: ¿Qué dice el SIMCE TIC?* Santiago de Chile: LOM ediciones.
- Gardner, H. (1983). *Inteligencias múltiples*. Buenos Aires: Paidós.
- Isoda, M., Arcavi, A., y Mena, A. (Eds.). (2012). *El estudio de clases de japonés en Matemática*. Valparaíso: Ediciones universitarias de Valparaíso.
- Marzano, R. & Pickering, D. (2005). *Dimensiones del aprendizaje. Manual para el maestro*. México. ITESO.
- Mc Tigue, J. & Wiggings, G. (2004). *Understanding By Design, Professional Development Workbook*. ASCD Publications.
- Mineduc. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago, Mineduc.
- Mineduc (2015). *Diversificación de la enseñanza*. Decreto n.° 83. Santiago: Mineduc.
- Rigo, D. (2014). *Aprender y enseñar a través de imágenes. ASRI: Arte y sociedad. Revista de investigación, 6. http://asri.eumed.net/6/educacion-imagenes.html*
- Ritchhart, R. Church, M. & Morrison, K. (2014). *Hacer visible el pensamiento. Cómo promover el compromiso, la comprensión y la autonomía de los estudiantes*. Buenos Aires: Paidós.
- Ruiz, M., Meneses, A. & Montenegro, M. (2013). *Calidad de textos escolares para aprender ciencias: habilidades, contenidos y lenguaje académico*. Santiago: Mineduc.
- Stone, M. (Comp). (2005). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Paidós.

Webgrafía

- *http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Decimalafraccion.htm*
- *http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Representacion_en_la_recta/Numeros3.htm*
- *http://www.ine.cl/canales/chile_estadistico/familias/precios.php*
- *http://ramonnavas.com/wordpress/?page_id=9*
- *http://www.wolframalpha.com/*
- *http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/trian9.htm*
- *http://www.mcescher.com/*

En la creación de este texto se utilizaron las siguientes familias tipográficas:

Myriad Pro

Vag Rounded Std

Calliope MVB Std


NO LO RAYES NI SUBRAYES
TÓMALO CON CUIDADO
NO DOBLES SUS ESQUINAS NI SAQUES HOJAS
NO LO MANCHES CON COMIDAS, BEBIDAS Y/O AGUA
GUÁRDALO EN UN LUGAR ADECUADO
Ministerio de Educación
Gobierno de Chile
SANTILLANA
9789561534834